2. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung SS2021

Gernot Salzer, Marion Scholz

5. Juni 2021

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei Σ das Alphabet $\{\mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{n}, \mathtt{o}, \mathtt{s}\}$ und L die Menge aller Wörter über Σ, die entweder mit `sonne` oder `sonde` enden. Beispiele für solche Wörter sind `sonne` und `sonde` selber, aber auch die Wörter `sosonne` und `osonde` liegen in L.

(a) Geben Sie einen Posix Extended Regular Expression an, der die Sprache L beschreibt.

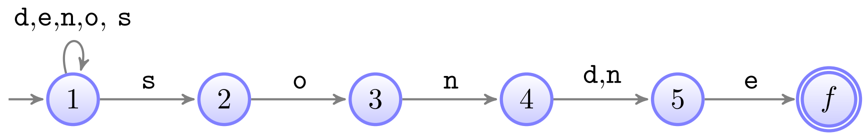
(b) Geben Sie einen nichtdeterministischen Automaten an, der die Sprache L akzeptiert. Der Automat soll der Definition der Sprache direkt entsprechen, sodass die Korrektheit der Modellierung unmittelbar einsichtig ist.

(c) Konstruieren Sie mit Hilfe des in der Vorlesung besprochenen Determinisierungsverfahrens zu Ihrem nichtdeterministischen Automaten einen äquivalenten deterministischen.

Lösung

(a) `[denos]*(sonne|sonde)` oder `^[denos]*(sonne|sonde)$` (falls die Zeichenkette die gesamte Zeile einnehmen soll)

(b) Ein indeterministischer Automat, der diese Sprache darstellt, ist der folgende:



(c) Wir stellen die Übergangsfunktion als Tabelle dar, da diese besser als Ausgangsbasis für die Determinisierung geeignet ist. (Genauer: Wir bestimmen das Ergebnis der erweiterte Übergangsfunktion δ^* für jeden Zustand und jedes Eingabesymbol. Wenn es ε-Übergänge gibt, müssen auch längere Pfade betrachtet werden.)

δ^*	d	e	n	o	s
1	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
2	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{3\}$	$\{\}$
3	$\{\}$	$\{\}$	$\{4\}$	$\{\}$	$\{\}$
4	$\{5\}$	$\{\}$	$\{5\}$	$\{\}$	$\{\}$
5	$\{\}$	$\{f\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
f	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

Einen deterministischen Automaten erhalten wir, indem wir den indeterminischen Automaten simulieren. Ein Zustand des deterministischen Automaten repräsentiert dabei jene Zustände des indeterministischen, in denen sich dieser zu diesem Zeitpunkt befinden kann. Der Startzustand wird mit $\{1\}$ bezeichnet, da sich der indeterministische Automat zu Beginn im Zustand 1 (und nur in diesem) befindet. Von diesem Zustand ausgehend erstellen wir zeilenweise die Tabelle für die Übergangsfunktion des deterministischen Automaten.

$\hat{\delta}$	d	e	n	o	s
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$
$\{1,3\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,4\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
$\{1,4\}$	$\{1,5\}$	$\{1\}$	$\{1,5\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
$\{1,5\}$	$\{1\}$	$\{1,f\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$
$\{1,f\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$

Jene Zustände, die einer Situation entsprechen, in der der indeterministische Automat einen Endzustand erreicht hat, sind die Endzustände des deterministischen Automaten; in diesem Beispiel ist das der Zustand $\{1,f\}$. Der Automat somit durch das Tupel $\langle \widehat{Q}, \Sigma, \hat{\delta}, \{1\}, \widehat{F} \rangle$ beschrieben, wobei

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{n}, \mathtt{o}, \mathtt{s}\} \\ \widehat{F} &= \{\{1,f\}\} \\ \widehat{Q} &= \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\}\} \cup \widehat{F} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Geben Sie endliche Automaten an, die dieselben Sprachen beschreiben wie die folgenden regulären Ausdrücke in algebraischer Notation.

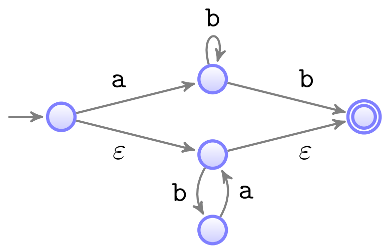
(a) $\mathtt{ab^*b} + \mathtt{(ba)^*}$

(b) $(\mathtt{a} + \mathtt{cb^*})\mathtt{cc^*}$

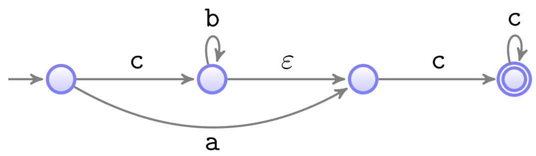
Lösung

Die gesuchten Automaten können mit dem allgemeinen Verfahren konstruiert werden, enthalten dann aber in der Regel viel mehr Zustände und ε-Kanten als notwendig. Die folgenden Automaten wurden bereits vereinfacht.

(a)



(b)



Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sind folgende Gleichungen für beliebige Sprachen L gültig? Falls ja, begründen Sie warum, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) $L \cdot \{\} = L \cup \{\varepsilon\}$

(b) $L \cdot \{\varepsilon\} = L \cup \{\}$

(c) $\{\varepsilon\} \cdot L^* = L^+$

(d) $(L \cdot L)^* = L^* \cdot L^*$

Lösung

(a) Diese Gleichung gilt für keine Sprache. Die linke Seite lässt sich zu $\{\}$ vereinfachen, während die rechte Seite eine Sprache darstellt, die mindestens das Leerwort enthält. Das einfachste Gegenbeispiel ist $L = \{\}$.

Linke Seite: $L \cdot \{\} = \{\} \cdot \{\} = \{\}$
Rechte Seite: $L \cup \{\varepsilon\} = \{\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$

(b) Diese Gleichung gilt für beliebige Sprachen L.

Rechte Seite: $L \cdot \{\varepsilon\} = L$
Linke Seite: $L \cup \{\} = L$

(c) Wegen $\{\varepsilon\} \cdot L^* = L^*$ ist die Gleichung äquivalent zu $L^* = L^+$. Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn L das Leerwort enthält, i.e., wenn $\varepsilon \in L$. Ein Gegenbeispiel ist $L = \{\mathtt{a}\}$.

Linke Seite: $\{\varepsilon\} \cdot L^* = \{\varepsilon\} \cdot \{\mathtt{a}\}^* = \{\mathtt{a}\}^*$
Rechte Seite: $L^+ = \{\mathtt{a}\}^+$

Die Sprache $\{\mathtt{a}\}^*$ enthält das Wort ε, die Sprache $\{\mathtt{a}\}^+$ hingegen nicht.

(d) Gegenbeispiel: $L = \{\mathtt{a}\}$.

Linke Seite: $(\{\mathtt{a}\} \cdot \{\mathtt{a}\})^* = \{\mathtt{aa}\}^*$
Rechte Seite: $\{\mathtt{a}\}^* \cdot \{\mathtt{a}\}^* = \{\mathtt{a}\}^*$

Die Sprache $\{\mathtt{a}\}^*$ enthält das Wort $\mathtt{a}$, die Sprache $\{\mathtt{aa}\}^*$ hingegen nicht.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

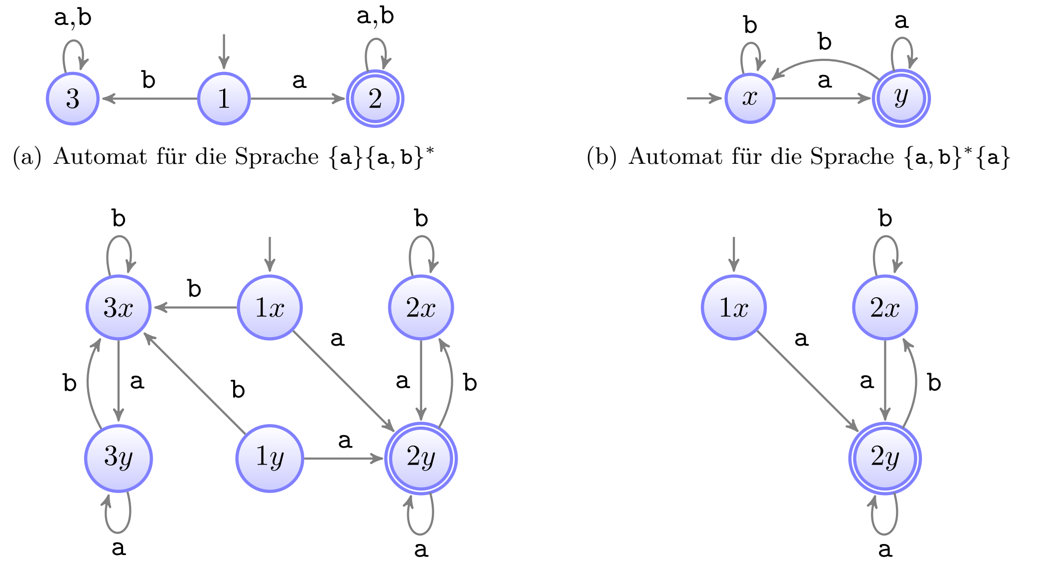
Seien $\mathcal{A}_1 = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, i_1, F_1 \rangle$ und $\mathcal{A}_2 = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, i_2, F_2 \rangle$ zwei beliebige deterministische Automaten über demselben Alphabet Σ. Geben Sie eine Methode an, um daraus einen Automaten $\mathcal{A}$ für den Durchschnitt der beiden zugehörigen Sprachen zu konstruieren, d.h., es soll $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ gelten.

Hinweis: Überlegen Sie sich die Aufgabenstellung zuerst an Hand einfacher konkreter Automaten und verallgemeinern Sie dann Ihre Beobachtungen. Wählen Sie für den neuen Automaten $\mathcal{A}$ Zustände mit der Bezeichnung q_1q_2, die signalisieren, dass sich der Automat $\mathcal{A}_1$ momentan im Zustand q_1 und der Automat $\mathcal{A}_2$ im Zustand q_2 befindet.

Lösung

Wir beschreiben zwei Verfahren. Das eine kontruiert den Automaten für den Durchschnitt direkt, das andere führt den Durchschnitt auf Vereinigung und Komplement zurück. Wenn Ihnen die formale Beschreibung zu abstrakt ist, versuchen Sie zuerst das Beispiel zu verstehen.

Verfahren 1: Kartesisches Produkt der Zustandsmengen. Wir konstruieren einen Automaten $\mathcal{A}$, der die beiden Automaten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ parallel ausführt. Als Zustände für $\mathcal{A}$ verwenden wir Paare (q_1, q_2), wobei $q_1 \in Q_1$ ein Zustand des ersten Automaten und $q_2 \in Q_2$ ein Zustand des zweiten Automaten ist. Der neue Automat befindet sich bei Eingabe eines Wortes w im Zustand (q_1, q_2), wenn sich der erste Automat bei diesem Wort im Zustand q_1 und der zweite im Zustand q_2 befinden würde. Der Startzustand (i_1, i_2) entspricht der Situation, in der sich die beiden ursprünglichen Automaten im Startzustand befinden. Ein Übergang mit dem Symbol s von (q_1, q_2) nach (q_1', q_2') existiert genau dann, wenn wenn man mit diesem Symbol in $\mathcal{A}_1$ von q_1 nach $q_1' = \delta_1(q_1, s)$ und in $\mathcal{A}_2$ von q_2 nach $q_2' = \delta_2(q_2, s)$ gelangt. Ein Wort wird von beiden Automaten akzeptiert



(a) Automat für die Sprache $\{\texttt{a}\}\{\texttt{a},\texttt{b}\}^*$

(b) Automat für die Sprache $\{\texttt{a},\texttt{b}\}^*\{\texttt{a}\}$

(c) Automat für die Sprache $\{\texttt{a}\} \cup \{\texttt{a}\}\{\texttt{a},\texttt{b}\}^*\{\texttt{a}\}$

(d) Automat aus Abb. 1(c) ohne Fallen

Abbildung 1: Beispiel für die Schnittbildung bei Automaten (Aufgabe 4)

(und liegt daher im Durchschnitt der Sprachen), wenn der neue Automat einen Zustand (q_1, q_2) erreicht, bei dem beide Zustände Endzustände im jeweiligen Automaten sind, wenn also $q_1 \in F_1$ und $q_2 \in F_2$ gilt. Ein Automat für den Durchschnitt der Sprachen $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ und $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ lässt sich somit durch

$$\mathcal{A} = \langle Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (i_1, i_2), F_1 \times F_2 \rangle$$

definieren, wobei die Übergangsfunktion festgelegt ist durch

$$\delta((q_1, q_2), s) = (\delta_1(q_1, s), \delta_2(q_2, s)) \quad \text{für alle } (q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2 \text{ und alle } s \in \Sigma.$$

Als Beispiel betrachten wir die Automaten

$$\mathcal{A}_1 = \langle \{1, 2, 3\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, \delta_1, 1, \{2\} \rangle$$

$$\mathcal{A}_2 = \langle \{x, y\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, \delta_2, x, \{y\} \rangle$$

δ_1	a	b
1	2	3
2	2	2
3	3	3

δ_2	a	b
x	y	x
y	y	x

Die Automaten sind in Abbildung 1(a) und 1(b) graphisch dargestellt. Automat $\mathcal{A}_1$ akzeptiert alle Wörter über $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$, die mit $\texttt{a}$ beginnen, und Automat $\mathcal{A}_2$ jene, die mit $\texttt{a}$ aufhören, d.h., $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \{\texttt{a}\}\{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*$ und $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*\{\texttt{a}\}$. Das oben beschriebene Verfahren liefert den Automaten

$$\mathcal{A} = \langle \{1x, 1y, 2x, 2y, 3x, 3y\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, \delta, 1x, \{2y\} \rangle$$

mit der Übergangsfunktion

δ	a	b
$1x$	$2y$	$3x$
$1y$	$2y$	$3x$
$2x$	$2y$	$2x$
$2y$	$2y$	$2x$
$3x$	$3y$	$3x$
$3y$	$3y$	$3x$

wobei die Zustandsbezeichnungen (q_1, q_2) auf q_1q_2 verkürzt wurden; siehe Abbildung 1(c). Lässt man nicht erreichbare Zustände sowie Fallen weg, ergibt sich der Automat in Abbildung 1(d). Für die Sprache des Automaten $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = \{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{a}\}\{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}$, d.h., der Automat akzeptiert alle Wörter, die sowohl mit `a` beginnen als auch aufhören.

Verfahren 2: Komplement, Vereinigung und nochmals Komplement. Der Durchschnitt von Mengen lässt sich mittels Komplementbildung auf die Vereinigung zurückführen. Es gilt $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (Regel von De Morgan) bzw. $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Umgelegt auf die Sprachen der beiden Ausgangsautomaten erhalten wir

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = \overline{\overline{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)} \cup \overline{\mathcal{L}(\mathcal{A}_2)}}$$

Ein Automat für $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$ lässt sich daher aus $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ folgendermaßen konstruieren.

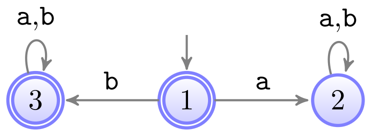
1. Konstruiere einen Automaten $\mathcal{A}_1^c$, der das Komplement der Sprache von $\mathcal{A}_1$ beschreibt, d.h., $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1^c) = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)}$. Da $\mathcal{A}_1$ laut Angabe deterministisch ist, erhalten wir $\mathcal{A}_1^c$ einfach durch Umwandeln der Nichtendzustände in Endzustände und umgekehrt.
$$\mathcal{A}_1^c = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, i_1, Q_1 \setminus F_1 \rangle$$
2. Dasselbe für $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_2^c$: $\mathcal{A}_2^c = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, i_2, Q_2 \setminus F_2 \rangle$
3. Konstruiere einen Automaten $\mathcal{A}$, der die Vereinigung der Sprachen von $\mathcal{A}_1^c$ und $\mathcal{A}_2^c$ beschreibt, d.h., $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1^c) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}_2^c)$. Hier können wir die Methode aus der Vorlesung zur Umwandlung eines regulären Ausdrucks in einen Automaten verwenden. Wir führen einen neuen Startzustand i ein und verbinden ihn durch ε-Kanten mit i_1 und i_2. Damit erhalten wir $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, i, F \rangle$, wobei
$$\begin{aligned} Q &= \{i\} \cup Q_1 \cup Q_2 \\ \delta &= \{(i, \varepsilon, i_1), (i, \varepsilon, i_2)\} \cup \delta_1 \cup \delta_2 \\ F &= (Q_1 \setminus F_1) \cup (Q_2 \setminus F_2) \end{aligned}$$
4. Der im vorigen Schritt konstruierte Automat $\mathcal{A}$ ist wegen der ε-Kanten nicht deterministisch. Um im nächsten Schritt den Automaten für die Komplementsprache bilden zu können, determinisieren wir $\mathcal{A}$ mit dem Verfahren aus der Vorlesung. Sei $\hat{\mathcal{A}} = \langle \hat{Q}, \Sigma, \hat{\delta}, \hat{\imath}, \hat{F} \rangle$ das Ergebnis der Determinisierung. Es gilt $\mathcal{L}(\hat{\mathcal{A}}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

5. Konstruiere einen Automaten $\hat{\mathcal{A}}^c$ für das Komplement der Sprache von $\hat{\mathcal{A}}$:

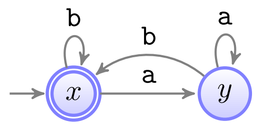
$$\hat{\mathcal{A}}^c = \langle \hat{Q}, \Sigma, \hat{\delta}, \hat{\imath}, \hat{Q} \setminus \hat{F} \rangle$$

Im folgenden Beispiel verwenden wir für $\mathcal{A}_1$ den Automaten aus Abbildung 1(a) und für $\mathcal{A}_2$ jenen aus Abbildung 1(b).

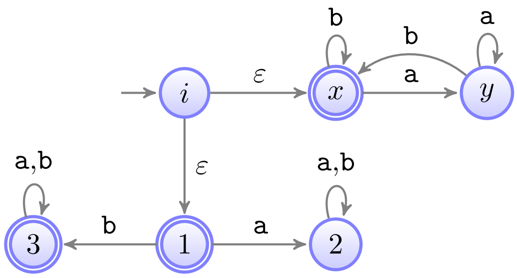
1. Automat $\mathcal{A}_1^c$ für das Komplement der Sprache von $\mathcal{A}_1$:



2. Automat $\mathcal{A}_2^c$ für das Komplement der Sprache von $\mathcal{A}_1$:



3. Automat $\mathcal{A}$ für die Vereinigung der Sprachen von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$:



4. Zur Determinisierung von $\mathcal{A}$ bestimmen wir als Zwischenschritt die Werte von $\delta^*(q, s)$ für jeden Zustand q und jedes Symbol s und daraus dann $\hat{\delta}$.

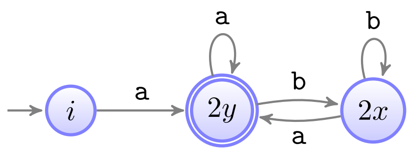
δ^*	a	b
i	$\{2, y\}$	$\{3, x\}$
1	$\{2\}$	$\{3\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$
x	$\{y\}$	$\{x\}$
y	$\{y\}$	$\{x\}$

	$\hat{\delta}$	a	b
EZ	$\{i\}$	$\{2, y\}$	$\{3, x\}$
	$\{2, y\}$	$\{2, y\}$	$\{2, x\}$
EZ	$\{3, x\}$	$\{3, y\}$	$\{3, x\}$
EZ	$\{2, x\}$	$\{2, y\}$	$\{2, x\}$
EZ	$\{3, y\}$	$\{3, y\}$	$\{3, x\}$

5. Im letzten Schritt bilden wir das Komplement des determinisierten Automaten und erhalten

	$\hat{\delta}$	a	b
	$\{i\}$	$\{2,y\}$	$\{3,x\}$
EZ	$\{2,y\}$	$\{2,y\}$	$\{2,x\}$
	$\{3,x\}$	$\{3,y\}$	$\{3,x\}$
	$\{2,x\}$	$\{2,y\}$	$\{2,x\}$
	$\{3,y\}$	$\{3,y\}$	$\{3,x\}$

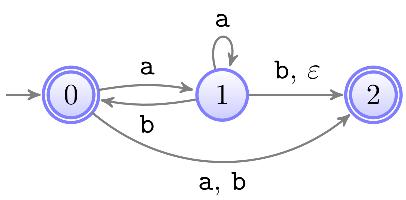
In graphischer Darstellung (ohne Fallen):



Reguläre Sprachen sind gegenüber Schnitt abgeschlossen. Diese Aufgabe liefert den Nachweis, dass der Schnitt von Sprachen, die von Automaten akzeptiert werden, wieder durch einen Automaten beschrieben werden kann. Die Familie der Sprachen, die von endlichen Automaten akzeptiert werden, ist daher abgeschlossen gegenüber Durchschnitt. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass diese Spachfamilie genau die regulären Sprachen sind. Daher sind auch die regulären Sprachen abgeschlossen gegenüber Durschnitt: Der Durchschnitt zweier regulärer Sprachen ist wieder regulär.

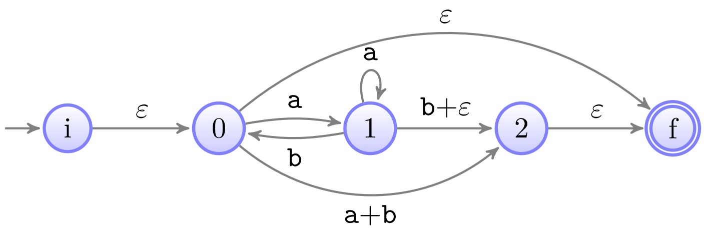
Aufgabe 5 (4 Punkte)

Konstruieren Sie zu folgendem endlichen Automaten einen regulären Ausdruck. Orientieren Sie sich am Algorithmus, der in der Vorlesung besprochen wurde und geben Sie den Automaten nach jeder Zustandselimination an.



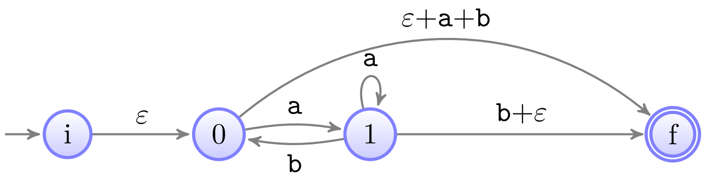
Lösung

- Neuer Anfangs- und Endzustand:

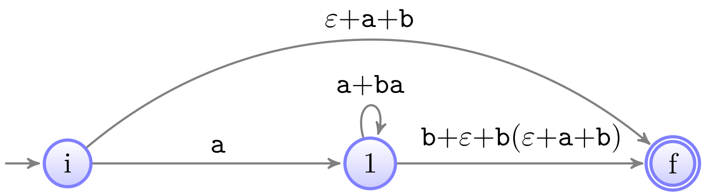


Bei der Elimination von Zuständen bevorzugen wir Zustände ohne Schleifen bzw. Zustände mit wenigen Übergängen, um die Anzahl der entstehenden Ausdrücke niedrig und die Ausdrücke selber so einfach wie möglich zu halten. Wir entscheiden uns für die Reihenfolge 2, 0 und 1. Die anderen Reihenfolgen sind ebenfalls möglich, sie liefern äquivalente Ausdrücke.

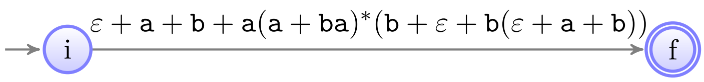
- Elimination von Zustand 2:



- Elimination von Zustand 0:



- Elimination von Zustand 1:



Die Sprache des ursprünglichen Automaten wird also durch den Ausdruck

$$\varepsilon + \mathtt{a} + \mathtt{b} + \mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{ba})^*(\mathtt{b} + \varepsilon + \mathtt{b}(\varepsilon + \mathtt{a} + \mathtt{b}))$$

bzw. durch den äqiuvalenten vereinfachten Ausdruck

$$\varepsilon + \mathtt{b} + \mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{ba})^*(\varepsilon + \mathtt{b} + \mathtt{bb})$$

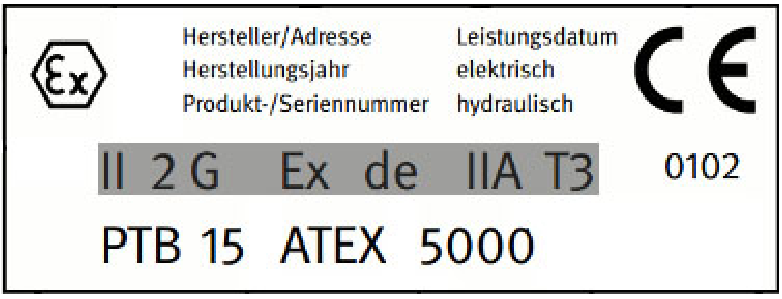
beschrieben.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Explosionsgeschützte Geräte und Komponenten müssen nach EG-Richtlinie 94/9/EG auf dem Typenschild mit allen Informationen gekennzeichnet sein, die erforderlich sind, um der Explosionsgefährdung entsprechende Maßnahmen treffen zu können. Die vorletzte Zeile eines solchen Typenschilds ist (vereinfacht) wie folgt aufgebaut, wobei die einzelnen Elementen jeweils durch ein Leerzeichen getrennt sind[1]:

- Gerätegruppe: „I“ oder „II“
- Gerätekategorie: Ziffer 1, 2 oder 3 optional gefolgt von „G“ oder „D“
- „Ex“ falls es sich um nicht-elektrische Betriebsmittel handelt; sonst bleibt das Feld leer
- Zündschutzart: ein Kleinbuchstabe optional gefolgt von beliebig vielen Klein- bzw. Großbuchstaben und/oder Ziffern
- Explosionsgruppe: „II“ gefolgt von einem Großbuchstaben
- Temperaturklasse: es gibt die Klassen „T1“ bis „T6“

Die nachfolgende Abbildung zeigt ein solches Typenschild. Der für diese Aufgabe relevante Bereich ist grau unterlegt.



Beschreiben Sie den Aufbau derartiger Typenschildzeilen mit den folgenden Methoden. Treffen Sie sinnvolle Annahmen, wenn Ihnen Informationen fehlen.

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck in algebraischer Notation an.

(b) Geben Sie einen regulären Ausdruck in POSIX-Notation an, der alle Zeilen beschreibt, die *ausschließlich* eine derartige Typenschild-Zeile enthalten.

(c) Zeichnen Sie das Syntaxdiagramm, das Ihrem regulären Ausdruck aus Teil a entspricht.

[1] http://www.bgbau-medien.de/handlungshilfen_gb/daten/dguv/209_046/10.htm#fn1

Lösung

(a) Die vorletzte Zeile des Typenschilds kann durch den Ausdruck

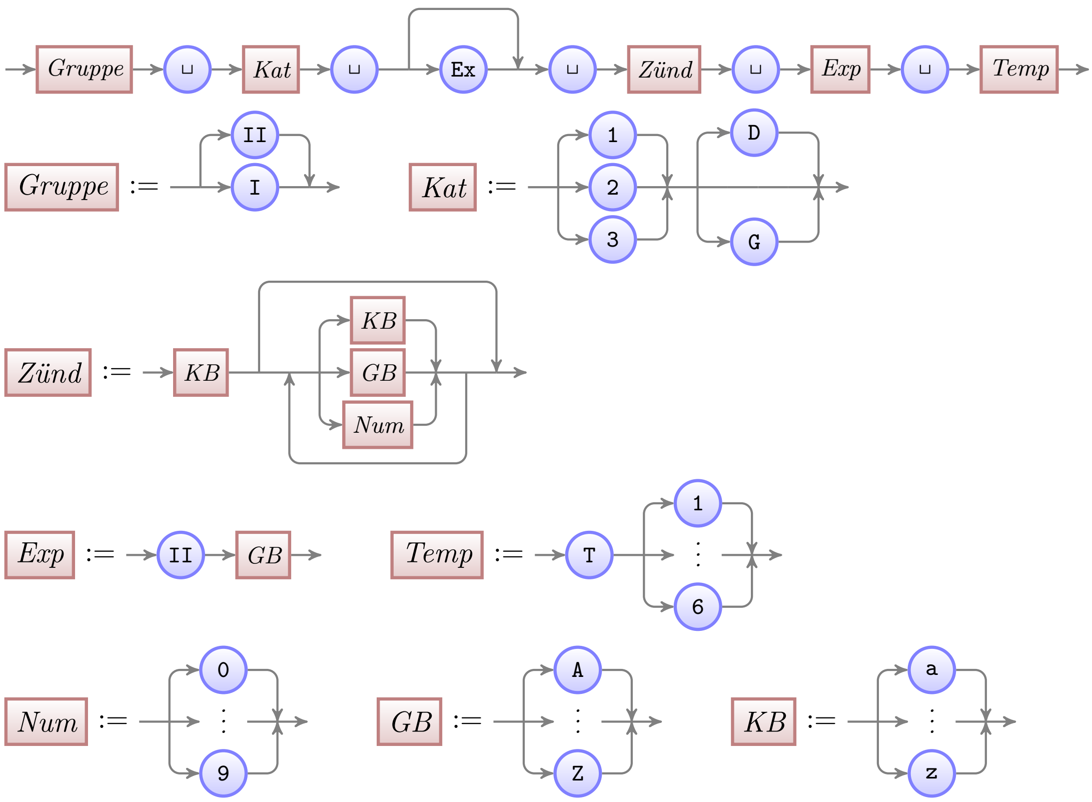
$$\mathit{Gruppe}\,\textvisiblespace\,\mathit{Kat}\,\textvisiblespace\,(\mathtt{Ex}+\varepsilon)\,\textvisiblespace\,\textit{Zünd}\,\textvisiblespace\,\mathit{Exp}\,\textvisiblespace\,\mathit{Temp}$$

beschrieben werden, wobei wir folgende Abkürzungen verwenden:

$$\begin{aligned}
\mathit{Gruppe} &:= (\mathtt{I}+\mathtt{II})\\
\mathit{Kat} &:= (\mathtt{1}+\mathtt{2}+\mathtt{3})(\varepsilon+\mathtt{D}+\mathtt{G})\\
\textit{Zünd} &:= \mathit{KB}(\mathit{KB}+\mathit{GB}+\mathit{Num})^*\\
\mathit{Exp} &:= \mathtt{II}\;\mathit{GB}\\
\mathit{Temp} &:= \mathtt{T}(\mathtt{1}+\mathtt{2}+\mathtt{3}+\mathtt{4}+\mathtt{5}+\mathtt{6})\\
\mathit{Num} &:= (\mathtt{0}+\cdots+\mathtt{9})\\
\mathit{GB} &:= (\mathtt{A}+\cdots+\mathtt{Z})\\
\mathit{KB} &:= (\mathtt{a}+\cdots+\mathtt{z})
\end{aligned}$$

(b) `^II?␣[123][DG]?␣(Ex)?␣[a-z][a-zA-Z0-9]*␣II[A-Z]␣T[123456]$`

(c) Syntaxdiagramm:



Aufgabe 7 (5 Punkte)

Gegeben sei die Geisterspuk-Grammatik $G = \langle N, T, P, A \rangle$, wobei

$$\begin{aligned} N &= \{A, B, C, D\} \\ T &= \{\texttt{h}, \texttt{sch}, \texttt{schu}, \texttt{uhu}, \texttt{uu}\} \\ P &= \{\, A \to \texttt{sch}\,\texttt{uhu}\,A \mid \texttt{uhu} \mid \ B\ \ , \\ &\qquad B \to \texttt{h}\,\texttt{uhu}\,C\ \ , \\ &\qquad C \to \texttt{uhu}\,D\ \ , \\ &\qquad D \to \texttt{schu}\,D \mid \texttt{uu} \mid \ A\} \end{aligned}$$

Überprüfen Sie für die nachfolgenden Wörter, ob sie in der von der Grammatik G spezifizierten Sprache $\mathcal{L}(G)$ liegen. Falls ja, geben Sie eine Ableitung an. Falls nein, argumentieren Sie, warum nicht, und ändern Sie das Wort möglichst geringfügig ab, sodass es in der Sprache liegt.

(a) `h uhu uhu schu uu`

(b) `sch uhu h uhu uhu schu schu sch uhu uhu`

(c) `sch uhu sch uhu uhu uu`

Überlegen Sie weiters:

(d) Wie lautet das kürzeste Wort der Sprache?

(e) Ist es möglich, die Sprache $\mathcal{L}(G)$ auch durch einen endlichen Automaten zu beschreiben? Falls ja, geben Sie einen derartigen Automaten an. Falls nein, begründen Sie, warum das nicht geht.

Lösung

(a) Ja, das Wort liegt in der Sprache $\mathcal{L}(G)$.

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow B \\ &\Rightarrow \texttt{h}\,\texttt{uhu}\,C \\ &\Rightarrow \texttt{h}\,\texttt{uhu}\,\texttt{uhu}\,D \\ &\Rightarrow \texttt{h}\,\texttt{uhu}\,\texttt{uhu}\,\texttt{schu}\,D \\ &\Rightarrow \texttt{h}\,\texttt{uhu}\,\texttt{uhu}\,\texttt{schu}\,\texttt{uu} \end{aligned}$$

(b) Ja, das Wort liegt in der Sprache $\mathcal{L}(G)$.

$$
\begin{aligned}
A &\Rightarrow \texttt{sch uhu}\,A\\
&\Rightarrow \texttt{sch uhu}\,B\\
&\Rightarrow \texttt{sch uhu h uhu}\,C\\
&\Rightarrow \texttt{sch uhu h uhu uhu}\,D\\
&\Rightarrow \texttt{sch uhu h uhu uhu schu}\,D\\
&\Rightarrow \texttt{sch uhu h uhu uhu schu schu}\,D\\
&\Rightarrow \texttt{sch uhu h uhu uhu schu schu}\,A\\
&\Rightarrow \texttt{sch uhu h uhu uhu schu schu sch uhu}\,A\\
&\Rightarrow \texttt{sch uhu h uhu uhu schu schu sch uhu uhu}
\end{aligned}
$$

(c) Das Wort liegt nicht in der Sprache $\mathcal{L}(G)$. Wir probieren alle Möglichkeiten aus, dieses Wort abzuleiten und brechen ab, sobald sich der Beginn des Zwischenbegebnisses vom gesuchten Wort unterscheidet. Da alle Möglichkeiten fehlschlagen, ist das Wort nicht ableitbar.

$A \Rightarrow \texttt{sch uhu}\,A \Rightarrow \texttt{sch uhu sch uhu}\,A \Rightarrow \texttt{sch uhu sch uhu sch uhu}\,A \quad \lightning$
$A \Rightarrow \texttt{sch uhu}\,A \Rightarrow \texttt{sch uhu sch uhu}\,A \Rightarrow \texttt{sch uhu sch uhu uhu} \quad \lightning$
$A \Rightarrow \texttt{sch uhu}\,A \Rightarrow \texttt{sch uhu sch uhu}\,A \Rightarrow \texttt{sch uhu sch uhu}\,B \Rightarrow \texttt{sch uhu sch uhu h uhu}\,C \quad \lightning$
$A \Rightarrow \texttt{sch uhu}\,A \Rightarrow \texttt{sch uhu uhu} \quad \lightning$
$A \Rightarrow \texttt{sch uhu}\,A \Rightarrow \texttt{sch uhu}\,B \Rightarrow \texttt{sch uhu h uhu}\,C \quad \lightning$
$A \Rightarrow \texttt{uhu} \quad \lightning$
$A \Rightarrow B \Rightarrow \texttt{h uhu}\,C \quad \lightning$

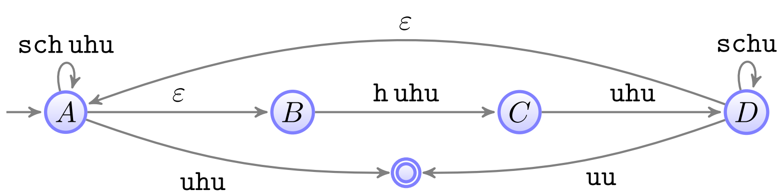
Alternativ können wir „das Pferd von hinten aufzäumen". Damit ein Wort auf `uu` enden kann, muss bei der Ableitung das Nonterminal D erreicht werden. Dieses kann nur über C erreicht werden, das wiederum nur über B erreicht wird. Die Ableitung jedes Wortes, das mit `uu` endet, endet also mit folgenden Schritten.

$$A \Rightarrow \cdots \Rightarrow w\,\mathtt{B} \Rightarrow w\,\texttt{h uhu}\,C \Rightarrow w\,\texttt{h uhu uhu}\,D \Rightarrow w\,\texttt{h uhu uhu uu}$$

Jedes Wort, das auf `uu` endet, muss also mit `h uhu uhu uu` enden. Das trifft aber auf das Wort der Angabe nicht zu, daher liegt es nicht in der Sprache $\mathcal{L}(G)$.

(d) `uhu`

(e) Ja, die Sprache $\mathcal{L}(G)$ kann auch durch einen endlichen Automaten beschrieben werden.



Aufgabe 8 (5 Punkte)

Der Inhalt und die Struktur von Dateiordnern wird wie folgt angegeben.

- Ein Ordner beginnt mit seinem Namen, dem in eckigen Klammen eingeschlossen sein Inhalt folgt.
- Die Namen von Ordnern bestehen ausschließlich aus Klein- und Großbuchstaben, mindesten aber einem.
- Der Inhalt zwischen den eckigen Klammern kann leer sein oder aus einer kommaseparierten Liste von Dateinamen oder weiteren Ordnern bestehen.
- Ein Dateiname besteht aus einer Folge von mindestens einem, aber höchstens vier Buchstaben, gefolgt von einem Punkt und einer Dateiendung, die aus zwei oder drei Kleinbuchstaben besteht.

Beispiele:
`H[]` ... ein leerer Ordner namens `H`
`btH[x.yz,hHgG.xxx]` ... ein Ordner namens `btH` mit zwei Dateien `x.yz` und `hHgG.xxx`
`X[a.aa,Y[Z[],b.bb],X[c.cc]]` ... Ordner mit Unterordnern

(a) Spezifizieren Sie die Sprache $\mathcal{D}$ solcher Dateiordner mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu strukturieren.

(b) Handelt es sich bei $\mathcal{D}$ um eine reguläre Sprache, d.h., lässt sich diese Sprache im Prinzip auch durch einen (komplizierten) regulären Ausdruck spezifizieren? Falls ja, skizzieren Sie den Ausdruck in einer der in der Vorlesung behandelten Notationen. Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

(a) Die Ordnersprache $\mathcal{D}$ wird durch die Grammatik $\langle N, T, P, \mathit{Ordner}\rangle$ beschrieben, wobei

$$
\begin{aligned}
N = \{&\mathit{Ordner}, \mathit{Inhalt}, \mathit{OrdnerDatei}, \mathit{Datei}, \mathit{Ordnername}, \mathit{Buchst}, \mathit{Klein}, \mathit{Groß}\} \ ,\\
T = \{&\cdots \textit{alle Zeichen in den Produktionen zwischen Anführungszeichen} \cdots\} \ ,\\
P = \{ \qquad \mathit{Ordner} &\to \mathit{Ordnername}\ \texttt{"["}\ [\,\mathit{Inhalt}\,]\ \texttt{"]"} \ ,\\
\mathit{Inhalt} &\to \mathit{OrdnerDatei}\ \{\ \texttt{","}\ \mathit{OrdnerDatei}\ \} \ ,\\
\mathit{OrdnerDatei} &\to \mathit{Ordner} \mid \mathit{Datei} \ ,\\
\mathit{Datei} &\to \mathit{Buchst}\ [\mathit{Buchst}]\ [\mathit{Buchst}]\ [\mathit{Buchst}]\ \texttt{"."}\ \mathit{Klein}\ \mathit{Klein}\ [\mathit{Klein}] \ ,\\
\mathit{Ordnername} &\to \mathit{Buchst}\ \{\ \mathit{Buchst}\ \} \ ,\\
\mathit{Buchst} &\to \mathit{Klein} \mid \mathit{Groß} \ ,\\
\mathit{Klein} &\to \texttt{"a"} \mid \cdots \mid \texttt{"z"} \ ,\\
\mathit{Groß} &\to \texttt{"A"} \mid \cdots \mid \texttt{"Z"}\}
\end{aligned}
$$

(b) Nein, $\mathcal{D}$ ist keine reguläre Sprache. Andernfalls müsste es einen endlichen Automaten geben, der $\mathcal{D}$ akzeptiert. Die eckigen Klammern in den Wörtern von $\mathcal{D}$ müssen korrekt geschachelt sein, daher müsste der Automat die öffnenden Klammern mitzählen, um anschließend die Zahl der zugehörigen schließenden Klammern kontrollieren zu können. Zum Zählen muss der Automat mit jeder weiteren öffnenden Klammer in einen neuen Zustand wechseln. Da die Zahl der Klammern nicht beschränkt ist, lässt sich auch die Zahl der benötigten Zustände nicht begrenzen. Das widerspricht aber der Tatsache, dass der Automat nur über eine fixe endliche Anzahl von Zuständen verfügt.

Aufgabe 9 **(5 Punkte)**

Wählen Sie geeignete Prädikaten- und Konstantensymbole und übersetzen Sie die folgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln.

(a) Hakan kauft etwas.

(b) Hakan kauft eine DVD.

(c) Anna kauft alles das, was Hakan kauft.

(d) Jeder kauft etwas.

(e) Jemand kauft alles.

Lösung

Sei *Kauft*/2 ein Prädikatensymbol sowie *anna*, *hakan* und *dvd* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$$\begin{array}{ll} \mathit{Kauft}(x,y) & \ldots\ x \text{ kauft } y \\ \mathit{dvd} & \ldots\ \text{DVD} \\ \mathit{hakan} & \ldots\ \text{Hakan} \\ \mathit{anna} & \ldots\ \text{Anna} \end{array}$$

(a) $\exists x\, \mathit{Kauft}(\mathit{hakan}, x)$

(b) $\mathit{Kauft}(\mathit{hakan}, \mathit{dvd})$

(c) $\forall x(\mathit{Kauft}(\mathit{hakan}, x) \supset \mathit{Kauft}(\mathit{anna}, x))$

(d) $\forall x \exists y\, \mathit{Kauft}(x, y)$

(e) $\exists x \forall y\, \mathit{Kauft}(x, y)$

Aufgabe 10 **(5 Punkte)**

Seien *Bekämpft*/2, *Jedi*/1, *Sith*/1 und *Dunkel*/1 Prädikatensymbole sowie *yoda* ein Konstantensymbol mit folgender Bedeutung:

$\mathit{Jedi}(x)$	… x ist ein Jedi-Ritter	$\mathit{Bekämpft}(x, y)$	… x bekämpft y
$\mathit{Sith}(x)$	… x ist ein Sith	yoda	… Yoda
$\mathit{Dunkel}(x)$	… x ist dunkel		

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

(a) Es gibt dunkle Sith, die alle Jedi-Ritter bekämpfen.

(b) Kein Jedi-Ritter bekämft alle Sith.

Sei weiters folgende Interpretation I gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Obi-Wan}, \text{Yoda}, \text{Luke}, \text{Anakin}, \text{DarthVader}, \text{DarthBane}, \text{DarthMaul},\\
&\quad\ \text{DarthTyrannus}, \text{DarthSidious}, \text{Yaddle}\}\\
I(\mathit{Jedi}) &= \{\text{Obi-Wan}, \text{Yoda}, \text{Luke}, \text{DarthVader}, \text{Yaddle}\}\\
I(\mathit{Sith}) &= \{\text{DarthVader}, \text{DarthBane}, \text{DarthMaul}, \text{DarthTyrannus}\}\\
I(\mathit{Dunkel}) &= \{\text{DarthBane}, \text{DarthVader}, \text{Anakin}\}\\
I(\mathit{Bekämpft}) &= \{(\text{Obi-Wan}, \text{DarthTyrannus}), (\text{Obi-Wan}, \text{DarthBane}), (\text{Obi-Wan}, \text{DarthMaul}),\\
&\quad\ (\text{Yoda}, \text{DarthMaul}), (\text{Yoda}, \text{DarthTyrannus}),\\
&\quad\ (\text{Luke}, \text{Anakin}), (\text{Luke}, \text{DarthTyrannus}),\\
&\quad\ (\text{DarthVader}, \text{Luke}), (\text{DarthVader}, \text{DarthVader}),\\
&\quad\ (\text{Anakin}, \text{Obi-Wan}), (\text{Anakin}, \text{Luke}), (\text{Anakin}, \text{DarthVader}),\\
&\quad\ (\text{DarthBane}, \text{Obi-Wan}), (\text{DarthBane}, \text{Luke}), (\text{DarthBane}, \text{Yoda}),\\
&\quad\ (\text{DarthSidious}, \text{Yaddle})\}\\
I(\mathit{luke}) &= \text{Luke}\\
I(\mathit{darthvader}) &= \text{DarthVader}
\end{aligned}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der angegebenen Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

(c) $\exists x\, (\mathit{Dunkel}(x) \land \mathit{Sith}(x) \land (\mathit{Bekämpft}(x, \mathit{luke}) \not\equiv \mathit{Bekämpft}(x, \mathit{darthvader})))$

(d) $\forall x \exists y\, (\mathit{Jedi}(x) \land \mathit{Sith}(y) \land \mathit{Bekämpft}(x, y))$

(e) $\forall x(\mathit{Jedi}(x) \supset \exists y(\mathit{Sith}(y) \land \mathit{Bekämpft}(y, x)))$

Lösung

(a) $\exists x\,(Sith(x) \wedge Dunkel(x) \wedge \forall y\,(Jedi(y) \supset Bekämpft(x,y)))$

(b) $\neg\exists x(Jedi(x) \wedge \forall y(Sith(y) \supset Bekämpft(x,y)))$ oder
$\forall x(Jedi(x) \supset \exists y(Sith(y) \wedge \neg Bekämpft(x,y)))$

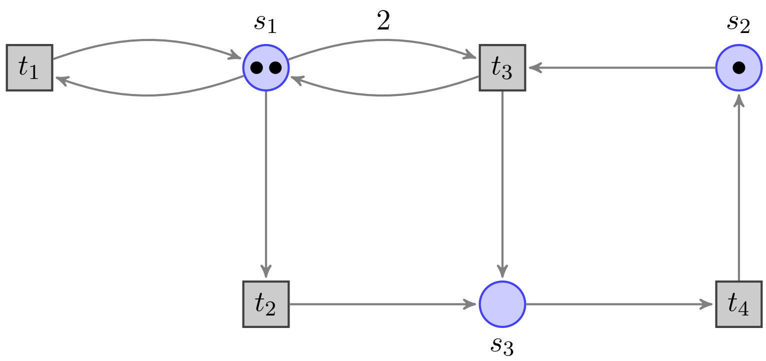
(c) Übersetzung: Es gibt einen dunklen Sith, der entweder Luke oder Darth Vader bekämpft (aber nicht beide).
Diese Aussage ist wahr in I, da Darth Bane ein dunkler Sith ist, der Luke aber nicht Darth Vader bekämpft.

(d) Übersetzung: Alles ist ein Jedi-Ritter und bekämpft einen Sith.
(Die Formel bedeutet nicht: Alle Jedi-Ritter bekämpfen einen Sith! Dafür müsste die erste Konjunktion durch eine Implikation ersetzt werden.)
Diese Aussage ist falsch in I.
Gegenbeispiel: Anakin kommt im Universum vor, ist aber kein Jedi-Ritter (Anakin $\notin I(Jedi)$). Damit ist die Konjunktion für diese Wahl von x immer falsch, daher auch die $\forall$-quantifizierte Formel.

(e) Übersetzung: Jeder Jedi-Ritter wird von einem Sith bekämpft.
Diese Aussage ist falsch in I. Yaddle wird nur von DarthSidious bekämpft, dieser ist aber kein Sith.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

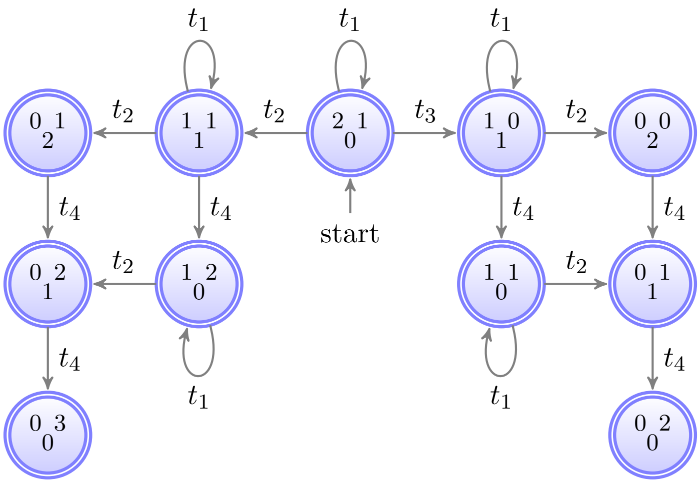
Gegeben sei das folgende Petri-Netz mit Anfangsmarkierung.



Fassen Sie die Bezeichnungen der Transitionen als Alphabet auf und die Markierungen (also die jeweiligen Belegungen der Stellen mit Marken) als Zustände. Beschreiben Sie die möglichen Reihenfolgen, in der die Transitionen feuern und die Markierungen auftreten können, mit Hilfe eines endlichen Automaten. Der Automat soll also Wörter wie $t_2t_2t_4$ akzeptieren, weil die Transitionen in dieser Reihenfolge feuern können, nicht aber t_2t_3.

Lösung

Die Abläufe im Petrinetz lassen sich durch einen Automaten mit (in diesem Fall) endlich vielen Zuständen beschreiben. Die Markierungen bilden die Zustände, die Transitionen das Alphabet. Erhält man aus einer Markierung m durch Feuern einer Transition t eine Markierung m', dann gibt es einen Übergang beschriftet mit t vom Zustand für m zu jenem für m'.
Wir stellen jede Markierung durch drei Zahlen ${}^{n_1}{}_{n_3}{}^{n_2}$ dar, wobei n_i die Anzahl der Marken in der Stelle s_i angibt. Die endlichen Reihenfolgen, in denen die Transitionen feuern können, entsprechen der Sprache des folgenden Automaten.



Aufgabe 12 (4 Punkte)

Entwickeln Sie schrittweise ein Petri-Netz für die folgende Problemstellung. Geben Sie den Stellen und Transitionen sinnvolle Bezeichnungen, die ihre Rolle erklären.

(a) Eine zweispurige Brücke kann in beiden Richtungen von Fahrzeugen befahren werden. Modellieren Sie dieses System mit Hilfe eines Petri-Netzes, wobei die drei Fahrzeugpositionen vor, auf und nach der Brücke dargestellt werden sollen. Nehmen Sie an, dass die Brücke vier Fahrzeuge in der einen und zwei Fahrzeuge in der anderen Richtung überqueren wollen, die Brücke selber aber leer ist.

(b) Bei einer Inspektion der Brücke werden bauliche Mängel festgestellt, sodass sich von nun an nur mehr drei Fahrzeuge gleichzeitig auf der Brücke befinden dürfen (insgesamt, unabhängig von der Fahrtrichtung). Erweitern Sie Ihr Petri-Netz, sodass diese Bedingung eingehalten wird.

(c) Während der Reparatur ist die Brücke nur einspurig befahrbar. Damit es zu keinen Unfällen bzw. Blockaden kommt, werden auf beiden Seiten Ampeln aufgestellt, die abwechselnd auf grün schalten. Dabei dürfen die Ampeln erst umschalten, wenn die Brücke frei von Fahrzeugen ist. Fahrzeuge fahren nur dann auf die Brücke, wenn ihre Ampel grün zeigt (und sich noch keine drei Fahrzeuge auf der Brücke befinden). Erweitern Sie Ihr Petri-Netz um diese Ampeln und das beschriebene Verhalten.

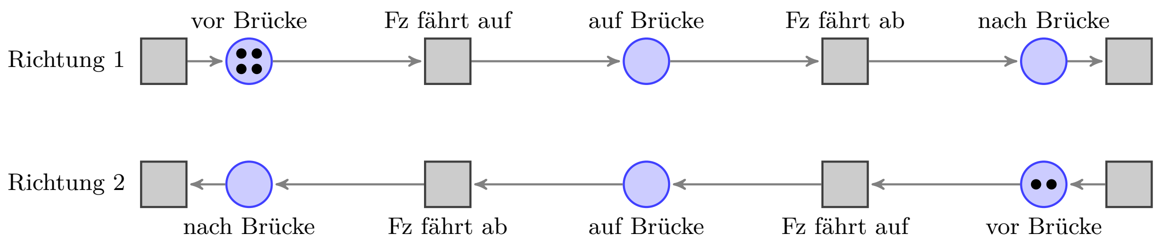
Hinweise: Ihr Petri-Netz wird weiterhin zwei „Spuren“ aufweisen, Sie müssen nur sicherstellen, dass sich die Fahrzeuge zu jedem Zeitpunkt nur in eine Richtung bewegen. Für diese Erweiterung benötigen Sie bei einigen Übergängen Gewichte, die größer als 1 sind.

(d) Nach der vorigen Teilaufgabe sollte Ihr Petri-Netz sicher sein, d.h., es sollte zu keinen Kollisionen auf der Brücke kommen können. Ist es aber auch fair? Was passiert, wenn aus der Richtung, die gerade grün hat, ständig weitere Fahrzeuge nachkommen? Wenn Ihr Petri-Netz trotzdem umschalten kann, sind Sie bereits fertig. Andernfalls erweitern Sie Ihre Ampeln um eine Phase, während der beide rot sind, sodass sich die Brücke leeren und anschließend die andere Richtung zum Zug kommen kann.

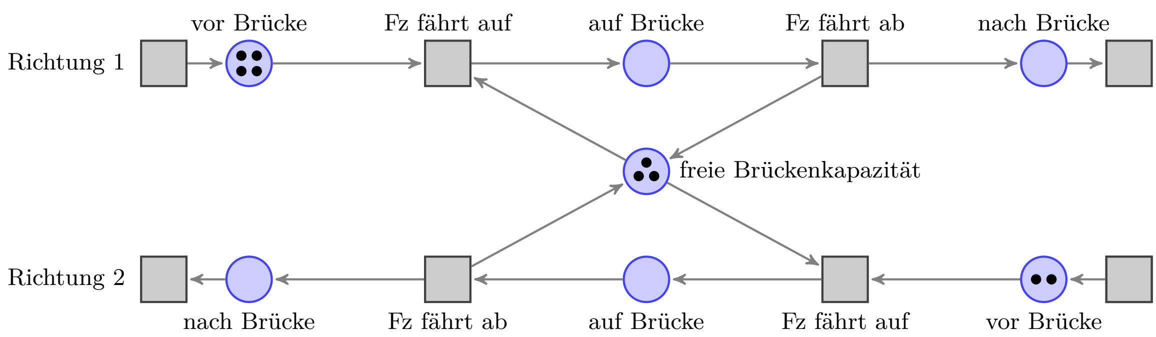
Lösung

Abkürzungen in den folgenden Petri-Netzen: Fz . . . Fahrzeug, A . . . Ampel
Die Transitionen am Beginn und am Ende der beiden Richtungen sind optional und sorgen lediglich für Zu- und Abfuhr von Fahrzeugen.

(a)

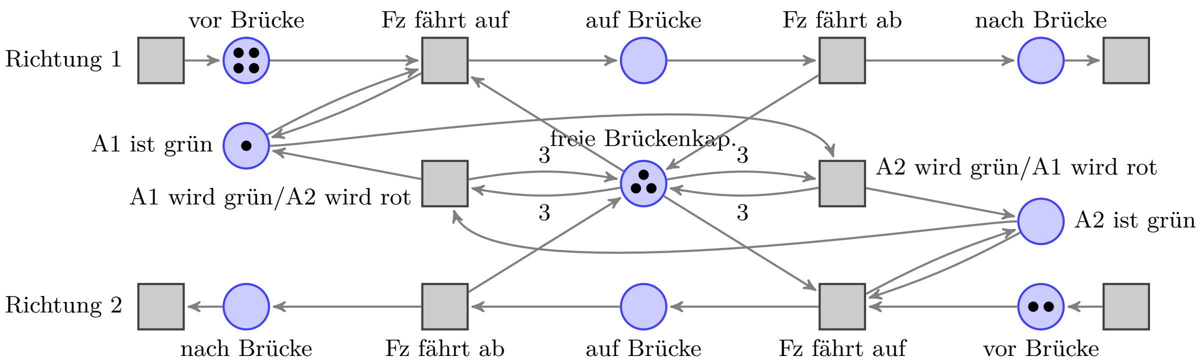


(b)



Die Zahl der Marken in der Stelle „freie Brückenkapazität“ zeigt an, wieviele Fahrzeuge noch auf die Brücke fahren dürfen. Die Summe aus der Markenanzahl in dieser Stelle und den Markenanzahlen in den beiden Stellen „auf Brücke“ ist immer drei.

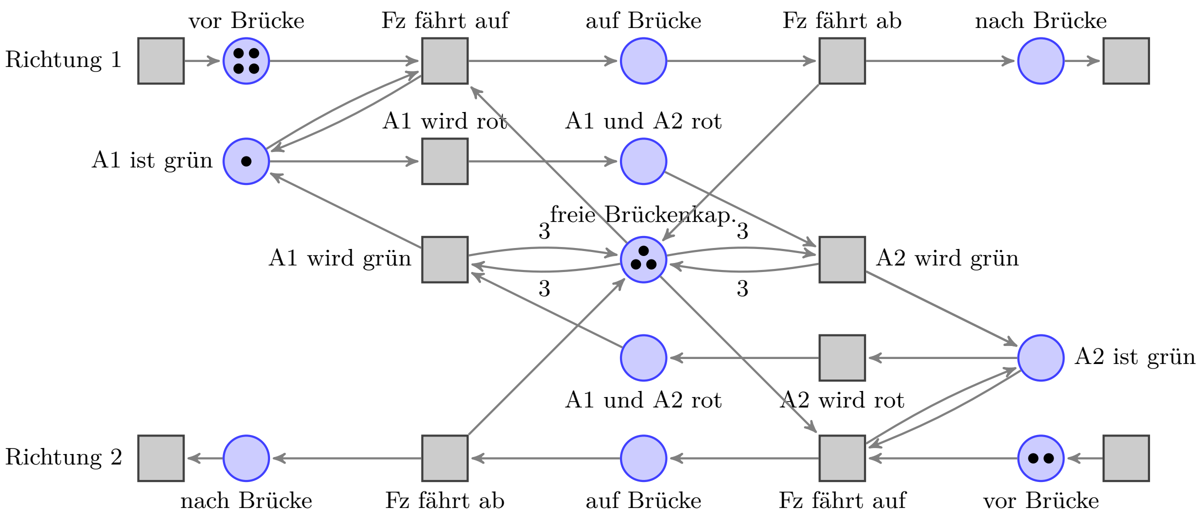
(c)



Die Marke in der Stelle „A1 ist grün“ bzw. „A2 ist grün“ zeigt an, dass die entsprechende Ampel grün ist. Durch diese Marke kann dann die zugeörige Transition „Fz fährt auf“ schalten und Fahrzeuge auf die Brücke lassen. Die Stelle in der Mitte beschränkt nach wie vor die maximale Kapazität. Erst wenn alle drei Marken in der Stelle „freie Brückenkapazität“ liegen, die Brücke also leer ist, können die Ampeln umschalten.

Die Brücke ist dank der Ampeln sicher, es kann zu keiner Kollision auf der Brücke kommen. Die Ampeln sind aber nicht fair: Solange aus einer Richtung weitere Autos auf die Brücke auffahren, leert sich die Brücke nicht, in der mittleren Stelle liegen weniger als drei Marken und die Ampeln können nicht schalten.

(d)



In diesem Petri-Netz kann eine grüne Ampel jederzeit auf rot schalten. Dann können zwar die Autos die Brücke noch verlassen, es können aber keine weiteren folgen. Sobald die Brücke leer ist, kann die andere Ampel auf grün schalten.