Paper: The Promises of Functional Programming, Konrad Honsen

Was unterscheidet Funktionen im mathematischen Sinn von Funktionen im Sinn imperativer oder objektorientierter Programmiersprachen?
Funktionen im mathematischen Sinn seiteneffektfrei.

In imperativen oder objektorientierten Programmiersprache gilt das aber nicht, das sind Prozeduren mit Seiteneffekten und dabei Seiteneffekte bewirken können.

Sie können also über das Liefern eines Werts hinaus etwas tun und bewirken. Angewendet auf dasselbe Argument liefern sie deshalb nicht dasselbe Resultat.

Paper: Scientific Programming - The Promises of Typed, Pure, and Lazy Functional Programming: Part II, Konstantin Läufer, George K. Thiruvathukal

Welche Vorteile gibt es für statische gegenüber dynamischer Typisierung in Programmiersprachen?
In Übersetzungszeit Typfehler prüfen -> Weniger Fehler zur Laufzeit, keine Überprüfungen notwendig, bessere Performance

- es stimmt nicht dass Aufwand für Programmierer steigt wegen Deklarationen, weil man Typen inferieren kann

Dynamisch getypt: Typfehler zur Laufzeit auftreten und zu Programmabbrüchen führen. Im Fall sicherheitskritischer Anwendungen das gefährlich.

Listen in Haskell sind homogen, die Elemente von Listen sind alle von ein und demselben Typ. Wie kann man in Haskell dennoch quasi heterogene Listen implementieren?
Listen über einem algebraischen Summentyp definieren, um quasi heterogene Listen zu definieren.

> zB: Für Listen mit 2 Typen würde der vordefinierte polymorphe Typ Either a b eine andere Möglichkeit bieten, den Typ IntOrString zu definieren.

Was bedeutet der Begriff *referential transparency*?
that we can replace any expression in a program with its resulting value without changing the program's semantics

- in rein funktionalen Sprachen durch die Abwesenheit von Seiteneffekten (abgesehen von Ausdrucken für I/O)

Haskell

- Große Community, große Bibliotheken,
- Schnittstelle zu anderen Sprachen, zB zu C
- *Rein* funktionale Programmierung, beruht auf angewandten typisierten λ-Kalkülen.
- Funktionen höherer Ordnung/Funktionale
- Musterpassung (pattern matching)
- Modularisierung zum skalieren -> Datenabstraktion (abstrakte Datentypen)
- Formatierung des Programmtexts trägt Bedeutung (Tabs und Abstände machen einen Unterschied), dafür keine geschwungenen Klammern für Funktionen notwendig

- Statisch typisiert mit Typinferenz
- lazy evaluation

Basics von Haskell

Relatoren

`>=, <=, ==, /=, usw`

Konstruktoren vs Operatoren

Konstruktoren führen zu eindeutigen Darstellungen von Werten, Operatoren nicht.

- (:) ist (einziger) Konstruktor für Listen. -> Eindeutige Darstellung
- (++) ist (einer von vielen) Operator(en) auf Listen. -> Nicht eindeutige Darstellung

Wichtig: Tupel sind heterogen, Listen sind homogen

Funktionen

Haskell-Funktionen sind einstellig: Es wird stets ein Argument zur Zeit konsumiert -> *Funktions-Stelligkeit ist 1.*

Signaturen (Rechtsassoziativ geklammert)

Syntaktische Funktionssignaturen geben den Typ einer Funktion an.
Es wird mit jedem Schritt / jeder Argumentkonsumation eine Funktion gebildet der das nächste Argument konsumiert (wenn von einem funktionalen Typ).

```
ersetze :: String -> Int -> String -> String -> String
ersetze :: (String -> (Int -> (String -> (String -> String))))
```

Funktionsterme (Linksassoziativ geklammert)

Funktionsterme sind aus Funktionsaufrufen aufgebaute Ausdrücke.
Ein Funktionsterm ist eine Funktion mit Argumenten sodass es ausgewertet werden kann.

```
ersetze "Ein alter Text" 1 "alter" "neuer"
((((ersetze "Ein alter Text") 1) "alter") "neuer")
```

Fallunterscheidungen

1) Bedingte Ausdrücke (`if . then . else .`)
   +: Keine (ähnlicher Syntax wie aus OOP)
   -: Geschachtelt schwer zu lesen und verstehen.

2) Bewachte Ausdrücke (`| waechterausdruck = …`)
   +: Kurz und klar
   -: mit `let` und `in` nicht gut kombinierbar

3) Musterbasierte Ausdrücke (`(x:y:zs) = ausdruck`)
   +: Kurz und klar, praktisch bei strukturierten Argumenten
   -: Schlechte Wartbarkeit, Änderungen aufwändig

4) case-Ausdrücke (`case musterausdruck of wert -> ausdruck...`)
   +: Keine (alles auch mit musterbasierten Ausdrucken machbar)
   -: Notationell aufwändiger als musterbasierte Ausdrücke

Unterschiede: 1,2 arbeiten mit Boolean aber 3,4 arbeiten mit der Struktur (vor allem bei Datenkonstruktoren).

Berechenbarkeit

Vereinfachte Vorstellung von Berechenbarkeit

'Etwas' ist *intuitiv* berechenbar, wenn es eine 'irgendwie machbare' effektive mechanische Methode gibt, die für

A) gültige Argumentwerte: in endlich vielen Schritten den Funktionswert konstruiert
B) nicht gültige Argumentwerte: mit einem besonderen Fehlerwert oder nie abbricht

Jetzt zu definieren: 'etwas', 'irgendwie machbar', effektive mechanische Methoden M

Jede Methode M definiert ein formales Berechenbarkeitsmodell: „Berechenbar mit M bzw. M-berechenbar".
Danach stellen wir die These auf:

M-These (Kein Theorem, gültig bis sie falsifiziert wurde)
'Etwas' ist M-berechenbar <=> 'Etwas' ist *intuitiv* berechenbar
(Denn es ist selbstverständlich, dass A <= B aber A => B lässt sich nicht beweisen.)

M-These für jedes M widerlegt wenn etwas M'-berechenbar ist, aber nicht M-berechenbar.

Berechnungsmodelle / Kalküle

arbeiten mit Symbolen, Zahlen und Termen, formale Systeme mit eigenen Axiomen, mathematische Berechnungsgrundlage (formale Grundlage) für jede Programmiersprache wenn Turing-Vollständig und Widerspruchsfrei.

Beispiel

- Allgemein / primitv rekursive Funktionen
  Gehen von einer vorgegebenen Menge an einfachen Funktionen aus. Komposition von anderen Funktionen oder sich selbst (Rekursion) bildet neue Funktionen.
  Falsifizierung durch Ackermann-Funktion die berechenbar ist, aber nicht primitiv-rekursiv-berechenbar.

  Nicht alleine Turing-vollständig -> Turing-Vollständigkeit erreicht durch μ-rekursive Funktionen und λ-Kalkül

Theorem - Gleichmächtigkeit

Was in einem dieser Modelle berechenbar ist, ist in jedem der anderen Modelle berechenbar und umgekehrt!

Daraus folgt : **Universalität des λ-Kalküls**

Alles, was in einem der vorher genannten Modelle berechenbar ist, ist im λ-Kalkül berechenbar und umgekehrt!.

Dieses Theorem schließt nicht aus, dass vielleicht noch heute eine mächtigere (Berechnungs-) Methode gefunden wird, die 'etwas' und *intuitiv berechenbar* umfassender, vollständiger ist. Dadurch möglich, dass nur ein Problem dass offensichtlich berechenbar ist, aber nicht im λ-Kalkül.
→ WAS ist Berechenbarkeit? Wir haben Interaktion bzw I/O ausgeschlossen für unsere Systeme

Churchsche These (λ-Kalkülthese)

'Etwas' ist intuitiv berechenbar <=> es ist im λ-Kalkül berechenbar.

λ-Kalkül (Berechnungsmodell)

Grundlage aller funktionalen Programmiersprachen

- Einfachheit: wenige syntaktische Konstrukte, einfache Semantik.
- Ausdruckskraft: Turing-mächtig, alle 'intuitiv berechenbaren' Funktionen sind im λ-Kalkül berechenbar.

Reiner λ-Kalkül

reduziert auf das 'absolut Notwendige'. Syntax des reinen λ-Kalküls nennt man kurz λ-Ausdrücke.

angewandte λ-Kalküle

Syntaktisch erweiterte Varianten des reinen λ-Kalküls, praxis- und programmiersprachennäher.
Extrem angereicherte angewandte λ-Kalküle nennt man Funktionale Programmiersprachen.

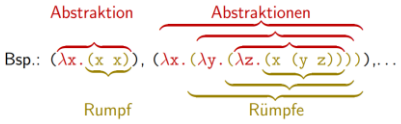
Reiner λ-Kalkül

λ-Ausdrücke

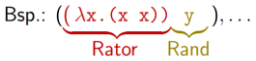
Die Menge E (von engl. Expression) der Ausdrücke des reinen λ-Kalküls über einer Menge N von Namen ist induktiv wie folgt definiert:

- ***λ-Namen:*** Variablen (für Werte oder Funktionen)
  Namen aus dem Namensraum N / Variable aus dem Variablenraum V.
  Jeder Name aus N ist in E.

- ***λ-Abstraktionen:*** Anonyme Funktionen, Lambda Ausdrücke
  Ist x aus N, e aus E, so ist (λx. e) in E.
  Sprechweise: (Funktions-) Abstraktion mit Parameter x und Rumpf e.



- ***λ-Applikationen:*** Funktionsanwendungen, Funktionsterme mit Eingabe
  Sind f und e aus E, so ist auch (f e) in E.
  Sprechweise: Applikation oder Anwendung von f auf e. f heißt auch Rator, e auch Rand.



  Der Rand ist das Argument, das von der Lambda Funktion konsumiert wird.

Backus-Naur-Form (BNF) Notation:

e	::=	x	(Namen)
	::=	$\lambda x.e$	((Funktions-) Abstraktion)
	::=	$e\ e$	((Funktions-) Applikation)
	::=	(e)	(Klammerung)

Rechts und Links-Assoziativität

Überflüssige Klammern können weggelassen werden.

- *Rechtsassoziativität für λ-Sequenzen in Abstraktionen.*

```
λx.λy.λz.(x (y z))      gleich mit      (λx.(λy.(λz.(x (y z)))))
λx. e                   gleich mit      (λx. e)
```

- *Linksassoziativität für Applikationssequenzen.*

```
e1 e2 e3 ... en  gleich mit        (((e1 e2) e3)... en)
e1 e2                   gleich mit          (e1 e2)
```

Freie und gebundene Variablen

Eine Variable ist gebunden wenn es unmittelbar nach einem λ folgt. Ansonsten ist es ungebunden.

```
((λx. (x y)) x)
```

x kommt frei und gebunden vor (einmal als Eingangsparameter, einmal einfach am Rand)
y kommt nur frei vor.

Syntaktische Substitution

Ist eine dreistellige Abbildung

```
·[·/·] : E → E → V → E
e´ [e/x]  (Alle x aus e´ werden zu e)
```

Beispiele:

- `((x y) (y z)) [(a b)/y] = ((x (a b)) ((a b) z))`
- `λx. (x y) [(a b)/y]          = λx. (x (a b))`
- `λx. (x y) [(a b)/x]          = λx. (x y)`

Reduktions und Konversionsregeln

Ziel: maximale Ausdrucksvereinfachung mit syntaktischer Konversion

α-Konversion

- Reine Umbenennung von gebundenen Parametern in λ-Abstraktionen (zur Vermeidung von Bindungsfehlern bei β-Konversion)

β-Konversion

- Funktionsanwendung - zur Anwendung einer λ-Abstraktion auf ein Argument -> Argument wird von außen nach innen geholt

η-Konversion

- zur Elimination unnötiger λ-Abstraktionen -> Funktionen entfernen die Redundant sind

α-Konversion um Bindungsfehler zu vermeiden

Substitution von freier mit gebundener Variable.

```
(λx. x y) [x/y] --naiv--> (λ x. x x)
```

Korrekt:

```
(λ x. x y) [x/y] =
        (λ z. x y) [z/x]) [x/y]
        (λ z. z y)[x/y]
        λ z. z x
```

1. α-Konversion (Umbenennung von Parametern)
   $\lambda x.\, e \longleftrightarrow \lambda y.\, e\,[y/x]$, wobei $y \notin \mathit{frei}(e)$
2. β-Konversion (Funktionsanwendung)
   $(\lambda x.\, f)\ e \longleftrightarrow f\,[e/x]$
3. η-Konversion (Elimination redundanter Funktion)
   $\lambda x.(e\ x) \longleftrightarrow e$, wobei $x \notin \mathit{frei}(e)$

Unterscheidung zwischen Konversion und Reduktion

- *Von links nach rechts angewendet: Reduktion* -> β-Reduktion und η-Reduktion
- *Von rechts nach links angewendet: Abstraktion*

Reduktionsfolgen und die maximale Reduktionsfolge / Normalform

Eine Reduktionsfolge für einen λ-Ausdruck

- Muss nicht endlich sein, muss nicht terminieren
- *Reduktionsfolge* heißt *maximal*, wenn höchstens noch α-Konversionen anwendbar sind.

- Ein *λ-Ausdruck* ist in *Normalform*, wenn er durch β-, η-Reduktionen nicht weiter reduzierbar ist.
  Normalform dient dazu die Semantik, die Bedeutung von λ-Ausdrucken zu definieren, sie auszuwerten.
  Die Semantik / Bedeutung / Wert eines λ-Ausdrucks ist seine Normalform, wenn sie existiert.

  - eindeutig bestimmte Normalform, wenn sie existiert
  - undefiniert, wenn die Normalform nicht existiert

Es gibt 2 Reduktionsreihenfolgen um die Normalform zu erreichen:

- Links-*Normale* Reduktionssordnung (linkest-äußerst)
- Links-*Applikative* Reduktionssordnung (linkest-innerst)

- Reduktionsordnung (applikative / normale reduktion) kann entscheiden ob die existierende Normalform erreicht wird

Die Church/Rosser-Theoreme

Seien e1, e2 zwei λ-Ausdrücke.

1. Theorem - Konfluenz-, Diamant-, Rauten-Eigenschaft

Wenn die Normalform eines λ-Ausdrucks existiert, ist sie (bis auf gebundenes Umbenennen von Namen) eindeutig bestimmt.
Wenn e1, e2 ineinander konvertierbar sind dann gibt es einen gemeinsamen Ausdruck e, zu dem beide reduziert werden können.

e1 ←→ e2 bedeutet e1 → e und e2 → e

2. Theorem - Standardisierung

Wenn irgendeine Reduktionsfolge zur Normalform eines λ-Ausdruck führt, dann auch immer die normale Reduktionsordnung.

3. Daraus folgt: Eindeutigkeit, Determiniertheit der Konversion, Turing-Mächtigkeit

Wenn ein Ausdruck auf Normalform reduziert werden kann, dann führt jede terminierende Reduktionsfolge zu dieser Normalform. Alle Reduktionen führen zum selben Ergebnis.

Rekursion und der Y-Kombinator

λ-Abstraktionen sind anonym und können deshalb nicht (rekursiv) aufgerufen werden.

Kombinatoren: der Y-Kombinator

Lambda-Terme ohne freien Variablen heißen Kombinatoren.
Y-Kombinator:

- mit Selbstverwendung und der Fähigkeit sich selbst zu reproduzieren und die Argumente zu kopieren. Das ermöglicht Rekursion.

```
fixpoint f = (\f -> (\x -> f (x x)) (\x -> f (x x)))
fixpoint f = f(fixpoint f)
```

Angewandte λ-Kalküle

sind syntaktisch angereicherte Varianten des reinen λ-Kalküls. In Ausdrücken angewandter λ-Kalküle:

- Konstanten, Funktionsnamen, neue Ausdrücke als Abkürzungen (if else), Typen,
- Applikative Terme : `2+3, fac 3, fib (2+3), binom x y, ((binom x) y),…`
- Abstraktionsterme `λx. (x + x), λx.λy.λz. (x * (y – z)),`
  `(λx. if odd x then x * 2 else x div 2),…`

δ-Reduktionsfolge

Dadurch zusätzliche Reduktionsregeln nötig: Auswertung, Reduktion arithmetischer Ausdrücke, bedingter Ausdrücke, Operationen auf Listen …

- Unecht applikative Ordnung (unecht, da ohne β-, η- und δ-Reduktionen)
- applikative Ordnung

Typisierte λ-Kalküle

ordnen jedem wohlgeformten Ausdruck einen Typ zu, z.B.:

```
3 : Int
(*) : Int → Int → Int
(λx.2 * x) : Int → Int
(λx.2 * x) 3 : Int
```

Ausdrücke mit Selbstanwendung wie der Y-Kombinator erzeugen 2 Schwierigkeiten:

- *Typisierung*: haben keinen endlichen Typ, ihr Typ ist nicht durch einen gewöhnlichen endlichen Typausdruck beschreibbar.
  Lösung: Übergang zu mächtigeren Typsprachen (engl. domain theory).
- *Rekursion*: können nicht zur Modellierung von Rekursion verwendet werden.
  Lösung: Explizite Hinzunahme der Reduktionsregel Y e → e (Y e) zum Kalkül.

Auswertung von Ausdrücken

Ein Ausdruck ist in Programmiersprachen ein Konstrukt, dass in Bezug auf einen Kontext ausgewertet werden kann, also einen Wert liefert.

Arithmetische Ausdrücke: `2*3; 2(x – a); x2 = 2x; y= sin(x);`
Aussagenlogische Ausdrücke: `a und b; wenn b dann a; a oder nicht b;`
Prädikatenlogische Ausdrücke: `wenn verheiratet(A, B) dann verheiratet(B, A);`

Ausdrücke in Programmiersprachen

- Literale (Konstanten): `2, 3.14, Strings und Zeichen …`
- Variablen: `x, y, z, …`
- Funktionen: `sin(phi), random(), aktMonatsNummer(), …`
- Operationen: `2*3, 2(x - a), x^3, cos(2*x + 3.14), …`

Expansions und Simplifikations-Schritte beim Auswerten

- *Expansions-Schritte:* Funktionsterme, Funktionsaufrufe
- *Simplifikations-Schritte:* Funktionstermfreie Ausdrücke Die einzelnen Vereinfachungs-, Rechenschritte

Auswertungs-Reihenfolgen / -Ordnungen

Ausdrucks-Auswertung =/= Ausdrucks-Vereinfachung / Reduktion mit syntaktischer Konversion.
Die Auswertungsreihenfolge hat keinen Einfluss auf den Wert des Ausdrucks.

- **Links Applikative Auswertung**: Linkest-innerste Stelle, Ausgewertet übergeben, Argumentauswertung vor Expansion des Funktionsaufrufs
- **Links Normale Auswertung**: Linkest-äußerste Stelle, Unausgewertet übergeben, Argumentauswertung nach Expansion des Fkt.aufrufs
  nur sinnvoll mit:
  - *Ausdrucksteilung (engl. expression sharing)* als Implementierungstrick.
    Dadurch späte, faule Auswertung (engl. lazy evaluation).

Die Church/Rosser-Theoreme

Theorem - Wertdeterminiertheit
Jede terminierende Auswertungsfolge für einen Ausdruck endet mit demselben Ergebnis.

Theorem – Terminierungshäufigkeit / Abweichendes Terminierungsverhalten
Terminiert irgendeine Auswertungsfolge für einen Ausdruck, so terminiert auch seine (links-) normale Auswertung.

Folgerungen:

- Terminierungshäufigkeit: Normal Terminiert immer wenn terminiert werden kann im Gegensatz zur Applikativen Auswertung.
- Terminierungsgeschwindigkeit / Performance: könnenunterschiedlich viele Schritte benötigen
- Kein Unterschied im Ergebnis: Wenn beide terminieren, so terminieren sie mit demselben Resultat

Lazy Evaluation: effiziente Implementierung der links-normalen Auswertung

Mehrfachauswertungen: Funktionsterm-Argumente werden (im worst case) so oft ausgewertet wie sie im Ausdruck vorkommen. Dadurch linksapplikative Auswertung effizienter.

Lösung durch effizientere Implementierung:
Ausdrucksdarstellung in Form von Graphen, wodurch gemeinsame Teil-Ausdrücke geteilt werden können *(engl. expression sharing)*:

- Ausdrucksauswertungen auf Graphen darstellen
- Wird ein Ausdruck ausgewertet, steht sein Wert an allen Verwendungsstellen zur Verfügung (Beansprucht so viel Speicher)

- garantiert, dass Argumente höchstens einmal ausgewertet werden (möglicherweise auch gar nicht) - Erreicht annähernd gleiche Effizienz wie applikative Auswertung.
- Terminiert immer wenn terminiert werden kann (dadurch Vorteile von beiden)

Übersetzeroptimierung durch Striktheits-Analysen bei Lazy Auswertung
Striktheit: Definiertheit von Funktion bestimmt durch Argumente

Striktheit von Funktionen
Funktion *strikt im n-ten Parameter* / Argument: Ist der Wert des Arguments des n-ten Parameters nicht definiert, so ist auch der Wert von f nicht definiert (dadurch f nicht auswertbar unabhängig von den Werten möglicher weiterer Argumente).

Beispiel: Striktheit bei einstelligen Funktionen
strikt in ihrem ersten (und einzigen) Parameter: Undefiniertheit des Argumentwerts impliziert Undefiniertheit der Funktion.
```
fac (1 ‘div‘ 0) ->> undef
```

Beispiel: Striktheit bei mehrstelligen Funktionen
Mehrstellige Funktionen können strikt in einigen Parametern, nicht strikt in anderen sein:
if . then . else . ist strikt im 1-ten Argument (Bedingung), nicht strikt im 2-ten und 3-ten Argument

Theorem – Striktheit und Terminierung
Für strikte Funktionen stimmen die Terminierungsverhalten und Resultat von früher und später Auswertungsordnung für die strikten Argumente überein. -> Durch den Übergang von normaler auf applikativer Auswertung für strikte Argumente einer Funktion gehen keine Ergebnisse verloren.

Anwendung: Optimierung der Übersetzung von lazy Auswertung
Eager Auswertung für strikte Funktionsargumente -> applikative Auswertung bedeutet kein Zusatzaufwand für die Verwaltung geteilter Datenstrukturen. Das setzt aber eine Striktheitsanalyse voraus.

- dort, wo es sicher ist, dass ein Ausdruck zum Ergebnis beiträgt und sein Wert deshalb in jeder Auswertungsordnung benötigt wird: statt lazy wird eager / applikativ benutzt

Applikativartige-Auswertung in Haskell
Eine applikativartige Auswertung kann in Haskell mithilfe des Operators ($!) erzwungen werden.
Informell wird alles, was rechts vom Operator ($!) steht zuerst auswerten.
Nicht vollständig applikativ, weil die Auswertung nur bis zu einer gewissen Tiefe durchgeführt wird.

Generator/Selektor-Prinzip: ermöglicht durch Lazy Auswertung
Lazy Evaluation damit die Generator- und Selektor-Ausdrücke ausgewertet werden können.
Führt Auswertung des Generatorausdrucks auf einen konzeptuell nicht endlichen Wert (z.B. Strom statt Liste, nicht endlicher Baum,...), würde die eager Evaluation nicht terminieren, der Selektorausdruck käme durch Lazy Auswertung aber nie zum Zuge.

Auswertungs-Reihenfolgen im Vergleich
Applikative Auswertungsordnung

- *Call-by-value:* Jedes Argument wird genau einmal ausgewertet.
- Fleißige, frühe Argument-Auswertung (engl. applicative, eager order evaluation, strict evaluation)
- Wertparameter-, innerste, strikte Auswertung (engl. call-by-value, innermost or strict evaluation)
- Operationalisierung: Linksapplikative, linkestinnerste, frühe, fleißige Auswertung (engl. leftmost- innermost or eager evaluation).

Normale Auswertungsordnung

- *Call-by-name:* Jedes Argument wird so oft ausgewertet, wie es benutzt wird
- Faule, späte Argument-Auswertung (engl. normal order evaluation)
- Namensparameter-, äußerste Auswertung (engl. call-by-name, outermost evaluation)
- Operationalisierung: Linksnormale, linkestäußerste Auswertung (engl. leftmost-outermost evaluation).
- Effiziente Operationalisierung mit Ausdrucksteilung: Späte, faule Auswertung (engl. lazy evaluation), Bedarfsparameter-Auswertung, (engl. call-by-need evaluation)

Vergleich von Eager und Lazy
Applikative Auswertung

- einfachere und schnellere Terminierung
- Funktionsargumente genau einmal ausgewertet
- Nachteilig: auch Funktionsargumente unnötig ausgewertet nicht verwendet werden.
- Aus mathematischer Perspektive oft natürlicher, weil die Undefiniertheit eines Funktionsarguments die Undefiniertheit des Funktionswerts zur Folge hat (Striktheit), was bei fauler Auswertung i.a. nicht so ist.

Faule Auswertung

- *Call by need:* Jedes Argument wird höchstens einmal ausgewertet. vereint die Vorteile applikativer Auswertung (Effizienz) und normaler Auswertung (Terminierungshäufigkeit) benötigt aber mehr Speicher und hat Zusatzaufwand für die Verwaltung geteilter Datenstrukturen.
- Terminiert so oft wie nur möglich
- Ausdrucke nur ausgewertet, wenn ihr Wert zum Wert des Gesamtausdrucks beiträgt, und dann nur genau einmal.
- Schwierigere Implementierung für *expression sharing*, um das unnötige Mehrfachauswerten von Ausdrucken zu vermeiden.

Programmierparadigmen im Vergleich

Paradigma bestimmte Denkweise, Art der Weltanschauung.
Programmierparadigma Programmiersprachen nach ihren Eigenschaften und Stil, der beim Programmieren praktiziert wird einteilen

Grobe Unterscheidung:

Imperativ
auf Maschinenbefehlen aufbauend, Befehlsorientiert
- *Prozedurales Paradigma*
- *Objektorientiertes Paradigma*

Deklarativ
auf formalen Modellen / Gleichungen beruhend, man deklariert das erwünschte Resultat, Ergebnisorientiert
- *Funktionales Paradigma*
- *Logikorientiertes Paradigma*

Prozedurale Programmierung (Paradigma):
Algorithmus in überschaubare Teile (Je nach Sprache: Unterprogramm, Routine, Prozedur oder Funktion genannt) zerlegen.
Praktisch in allen imperativen Sprachen.

Objektorientierte Programmierung (Paradigma):
Programmierung mit abstrakten Datentypen, behandelt Daten und Funktionen als eine Einheit -> Objekte als First-Class-Entities

Strukturierte Programmierung (Paradigma):
Erweitert das Paradigma der prozeduralen Programmierung. Verlangt die Beschränkung auf genau drei Kontrollstrukturen.

Applikative Programmierung (Paradigma)
Programmierung mit Ausdrücken und Funktionen die *elementare Werte* (Zahlen, Zeichen, Wahrheitswerte,...) als Argument und Resultat nehmen. Funktionen sind wichtigstes Abstraktions- und Ausdrucksmittel in applikativer und funktionaler Programmierung.

Funktionale Programmierung (Paradigma):
Funktionen als First-Class-Entities ermöglichen Funktionen höherer Ordnung.
Dadurch Rechnen mit Funktionen (Funktionen als Argument und Resultat) möglich (im Gegensatz zur applikativen Programmierung).

- Funktionale Programme bestehen nur aus Funktionen. Die einfachsten Funktionen sind primitive Funktionen. Aus Funktionen werden mithilfe von Funktionen höherer Ordnung neue Funktionen gebildet.

- bieten effiziente Auswertungsstrategien (lazy), die auch die Arbeit mit unendlichen Strukturen unterstützen.

<u>Funktionale Sprachen</u>
Lisp, ML, SML, Hope, Miranda, OPAL, Haskell, Gofer

<u>Das Besondere an funktionalen Sprachen:</u>
- Funktionskomposition $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$
- Funktionen höherer Ordnung -> Dienen zur Abstraktion
- Höhere Zuverlässigkeit da Korrektheitsüberlegungen und Beweise einfacher sind.
- Effizienz in Programmierung von komplexen Algorithmen
- einfachere Parallelisierbarkeit
- Automatische Listengenerierung, Listenkomprehension

<u>Der Nachteil:</u>
- Schlechte Wartbarkeit
- Keine GUI Programmierung möglich weil keine Zustandsänderungen möglich sind

Logikorientierte Programmierung (Paradigma):
logische Aussagen die verbunden werden - Prädikatenlogik.

- Programme sind Systeme von Prädikaten, die durch eingeschränkte Formen logischer Formeln, z.B. Horn-Formeln (Implikation), definiert sind.

Entwicklung von Sprachen
Bisher schrittweise Abstraktionen mit dem Ziel, Einzelheiten der zugrundeliegenden Rechenmaschine (von Neumann Architektur) zu verbergen.

- Prozeduale Sprachen Teilen Assembler Befehle in überschaubare Teile ein.
- OOP Sprachen führen Sichtbarkeitsebenen und Kapselungen ein, um die Datendarstellung und Speicherverwaltung zu verbergen.
  -> Programmformulierung mit Blick auf eine Maschine

- Deklarative Programme verbergen die Auswertungsreihenfolge. Reine deklarative Sprachen verzichten auch auf Zuweisungen, um Seiteneffekte auszuschließen. (Nicht alle deklarativen Sprachen Seiteneffektfrei.)
  -> Programmformulierung auf abstraktem, mathematisch geprägten Niveau, ohne eine Maschine im Blick

Funktionale vs. Imperative Programmierung

> Imperative Sprachen

Befehlsbasiertes Programmieren bedeutet: Zustandsänderungen

Programm: Menge von Befehlen (oder Instruktionen, Anweisungen) strukturiert durch Kontrollflussanweisungen

- Programm ist Arbeitsanweisung für eine Maschine: Anweisungen und Ausdrücke
- Programmausführung ist die Abarbeitung von Anweisungen, Kontrollfluss (Ausführungsreihenfolge) wird gesteuert (außer bei Ausdrücken)
- versteckte Seiteneffekte, Programme sind zustands- und 'zeitbehaftet'

Frage an Programm: In welchem Zustand terminiert Programm angesetzt auf einen Anfangszustand, oder: Was sind die Werte der Variablen nach Terminierung?

Bedeutung des Programms ist die Beziehung zwischen Anfangs- und Endzuständen, die bewirkte Zustandsänderung.

Anweisungen

Anweisungen bewirken Zustandsänderungen (Seiteneffekte).

Wertzuweisungen

Variablen sind Namen für Speicherplätze, können beliebig oft geändert werden. Namen werden in der zeitlichen Abfolge durch Zuweisungen temporär mit Werten belegt. Namen können durch wiederholte Zuweisungen beliebig oft mit neuen Werten belegt werden (in Schleife oder Rekursion).

> Funktionale Sprachen

Gleichungsbasiertes Programmieren bedeutet: Werteberechnungen, Wir beschreiben was wir wollen, nicht wie wir es wollen.

Programm: Menge von Vereinbarungen von Wertegleichheiten von Ausdrücken.

- Programm ist Ein-/Ausgaberelation: nur Ausdrücke
- Programmausführung ist Auswertung von Ausdrücken, Keine Kontrollflussspezifikation. Allein Datenabhängigkeiten steuern die Auswertungsreihenfolge, sonst steht sie nicht fest.
- referentiell transparent, Programme sind zustandsfrei und 'zeitlos'.

Frage an Programm: Welchen Wert hat ein Ausdruck für konkrete Werte seiner Operanden, wenn er mit den im Programm definierten Wertegleichheiten von Ausdrücken ausgewertet wird?

Bedeutung des Programms ist die Beziehung zwischen Aufrufargumenten von Ausdrücken und ihrem Wert.

Ausdrücke

Ausdrücke können ausgewertet werden. Das Resultat ist der Wert eines bestimmten Typs.
keine Zustandsänderungen, keine Seiteneffekte -> referentiell transparent

Beispiel: Verzweigung als Kontrollstruktur

Imperative und funktionale Fallunterscheidung (if-else) sind nur äußerlich sehr ähnlich, konzeptuell aber sehr verschieden.

Wertvereinbarungen

Variablen sind Namen für Ausdrücke: Namen werden durch Wertvereinbarungen genau einmal für immer an einen Wert gebunden. (Man spricht damit aber keine Speicherzelle direkt an.) Ihr Wert ist der Wert des Ausdrucks, den sie bezeichnen. Späteres Ändern, Überschreiben oder Neubelegen ist nicht möglich.

Referentielle Transparenz

Seiteneffekte

Auch Wirkung genannt, bewirkt Veränderung eines Zustandes (Variablenwert).
Jeder Programmfortschritt wird über Seiteneffekte erzielt (zB Variablenzuweisungen, Ein- und Ausgaben, Zustandsänderungen).

Versteckter Seiteneffekt

Gefährlich, versucht man zu vermeiden.

> Beispiel:
> f() sortiert ein Array und sammelt statistische Daten. Die sequentielle Ausführung f(x);f(y) wäre kein Problem, aber f(x);f(x);f(y) würde Array doppelt sortieren und statistischen Daten fälschen.

Umgang mit versteckten Seiteneffekten

Imperative Paradigmen versuchen versteckte Seiteneffekte möglichst reduzieren.
Deklarative Paradigmen sind referentiell Transparent:
Vollständige Seiteneffektfreiheit: es werden keine Variablen (Zustandslos) und keine Wertezuweisungen (Seiteneffektfrei) verwendet.

Definition: Referenzielle Transparenz

Wenn der Ausdruck durch seinen Wert ersetzt werden kann, ohne die Semantik des Programms dadurch zu ändern.

> 3 + 4 darf mit 7 vertauscht werden

Wenn der Wert des Ausdrucks überall im Programm gleich (hängt von Umgebung ab) und nicht vom Zeitpunkt oder einer bestimmten Reihenfolge der Auswertung. Das ist nur möglich wenn f seiteneffektfrei ist und nicht von Variablen abhängt deren Werte sich im Laufe der Zeit ändern könnten.

> f(x) + f(x) darf mit 2 * f(x) vertauscht werden (obwohl Bedeutung der Funktion unbekannt ist)

Funktionen in imperativen Paradigmen können referentiell Transparent sein, müssen es aber nicht.

Umgang mit I/O bei referentieller Transparenz

Problem: Wenn eine Ausdruck keine Zustände ändern kann, dann kann man nicht herausfinden was es berechnet hat.
Ein- und Ausgaben sind Seiteneffekte, die vollständige referentielle Transparenz unmöglich machen.
Sie werden benötigt, aber sind nicht erlaubt.

In funktionalen Sprachen erlaubt man Ein- und Ausgaben nur gut sichtbar ganz oben in der Aufrufhierarchie (für die erste aufgerufene Funktion die das End-Ergebnis zurückliefert) und verbannt sie aus allen anderen Funktionen.

Ausgabe auf Konsole wird nicht als Seiteneffekt gezählt.

> **Imperativ**
> Ein-/Ausgabe prinzipiell an jeder Programmstelle möglich.
>
> **Funktional (hier in Haskell)**
> Ein-/Ausgabe an bestimmten Programmstellen konzentriert (in meist wenigen global definierten Funktionen der ‘E/A-Schale’).

Funktionen höherer Ordnung / Funktionale

Funktionen höherer Ordnung sind spezielle Funktionen (die uncurryfiziert sind). Dabei können Funktionale sowohl Resultate sein als auch Argumente.

> Da Haskell-Funktionen grundsätzlich einstellig sind und damit in den meisten Fällen eine Funktion als Resultat liefern, sind in Haskell die allermeisten Funktionen Funktionen höherer Ordnung. (wenn curryfiziert)

Abstraktionsprinzipien

Kennzeichnendes Strukturierungsprinzip für…

Prozedurale Sprachen: Prozedurale Abstraktion
Operanden werden zu Parametern von Prozeduren / Methoden.

Funktionale Sprachen: Funktionale Abstraktion
1. Stufe: Funktionen
Nichtfunktionale Operanden werden zu Parametern von Funktionen (Gleich wie prozedurale Abstraktion).
Bewirkt: Wiederverwendung der gemeinsamen Berechnungsvorschrift und Code

Beispiel: Statt viele strukturell gleiche Ausdrücke wiederzuverwenden, eine Funktion, die die Operanden des Ausdrucksmusters als Parameter erhält und mit den ursprünglichen Ausdrucksoperanden(werten) aufgerufen wird.

```
(5 * 37 + 13) * (37 + 5 * 13)
...
f :: (Int,Int,Int) -> Int
f (a,b,c) = (a * b + c) * (b + a * c)
```

(Höhere) 2., 3.,... Stufe: Funktionen höherer Ordnung
Zusätzlich zum Herausziehen der Argumente auch das Herausziehen der Struktur möglicher Ausdrucke über diesen Argumenten, d.h. möglicher Verknüpfungsvorschriften der Argumente.

Verknüpfungsvorschriften werden zu funktionalen Parametern von Funktionen höherer Ordnung.
Quasi Schablonen von Programmteilen schreiben, die dann durch Übergabe von Funktionen (zum Füllen der Lücken in den Schablonen) ausführbar werden.

- Wiederverwendung von Programmcode
- einfacherer Beweis von Programmeigenschaften (Stichwort: Programmverifikation)
- Wiederverwendung des gemeinsamen Strukturmusters von Funktionen

```
fac n
        | n==0 = 1
        | n>0 = n * fac (n-1)

natSum n
        | n==0 = 0
        | n>0 = n + natSum (n-1)

natQuSum n
        | n==0 = 0
        | n>0 = n*n + natQuSum (n-1)
```

Die Definitionen von folgen demselben Rekursionsschema:

- Basisfall: eines Basiswertes
- Rekursionsfall: einer Verknüpfungsvorschrift des Argumentwerts n und des Funktionswerts für (n-1)

Abstraktion höherer Stufe:

Curryfizierte Signatur:

```
rekSchema :: Int -> (Int -> Int -> Int) -> Int -> Int
rekSchema basiswert verknuepfe n
        | n==0 = basiswert
        | n>0 = verknuepfe n (rekSchema basiswert verknuepfe (n-1))
```

Uncurryfizierte Signatur:

```
rekSchema :: (Int,(Int -> Int -> Int),Int) -> Int
```

Dadurch können wir alle 3 Funktionen mittels einer Funktion ausdrücken die nur den Verknüfungsoperator verlangt.

```
fac n = rekSchema 1 (*) n
natSum n = rekSchema 0 (+) n
natQuSum n = rekSchema 0 (\x y -> x*x + y) n
```

Curryfiziert vs. Uncurryfiziert

Entscheidend für die Unterscheidung ist die Anzahl der konsumierten Argumente

curryfizierte Funktion - Einzeln Argument für Argument: `f x, f x y, f x y z,...`
Nur curryfizierte Funktionen unterstützen das Prinzip partieller Auswertung und damit das Prinzip: Funktionen liefern Funktionen als Ergebnis.

Man kann auch salopp behaupten es sind mehrstellige Funktion (obwohl alle Funktionen nur 1 Argument konsumieren können).

uncurryfizierte Funktion - Alle auf einmal als Tupel: `f(x), f(x,y), f(x,y,z),...`
Mathematische Definition mit Produkt/Tupelbildung in einer Funktion mit mehreren Eingnagswerten wird in Haskell übersetzt. (Da Funktionen in Haskell jeweils nur ein Argument konsumieren können).

Mathematische Definition (Mit Kreuzprodukt)
`f: (N × N × N × N) → N`
wird in Haskell zu (Mit Tupeln)

```
function :: (Int, Int, Int, Int) -> Int
```

Uncurryfiziert gleiche Funktionalität wie curryfizierte Funktion aber nicht so flexibel. Uncurryfiziert nur dort, wo nötig, eher vermeiden.

Operatorabschnitte (engl. operator sections) in Funktionalen

Partiell ausgewertete Operationen: Funktionen in Haskell haben eine Stelligkeit von 1: Sie können bei jedem Auswertungsschritt nur ein Argument aufnehmen. Ein Operatorabschnitt ist eine partiell ausgewertete Funktion, die daher nur noch mehr Argumente benötigt, um ein nicht-funktionales Ergebnis zu liefern.

Kommutative Binäroperationen:
`(*2)` gleichzusetzen mit `(\x -> x*2)`
`(2*)` gleichzusetzen mit `(\x -> 2*x)`

Nicht-Kommutative Binäroperationen:
`(`div` 2)` gleichzusetzen mit `(\x -> div x 2)`
`(2 `div`)` gleichzusetzen mit `(\x -> div 2 x)`
`(binom 45)` gleichzusetzen mit `(\x -> binom 45 x)`

Verallgemeinert:

```
(op)            = (\x -> (\y -> x `op` y))
(x `op`)        = (\y -> x `op` y)
(`op` y)        = (\x -> x `op` y)
```

Bildung konstanter Funktionen (engl. λ-Lifting)
Als λ-Lifting bezeichnet man die Konstruktion einer konstanten Funktion zu einem gegebenen Wert w, die diesen Wert als einzigen Funktionswert hat (und deshalb eine konstant(wertige) Funktion ist.

In 4 verschiedenen syntaktischen Varianten:

```
lifting :: a -> (b -> a)

lifting x = \_ -> x
lifting x = g where g y = x
lifting x = g where g _ = x
lifting x = \y -> x
```

Punktfreiheit
Eine punktfreie Funktionsdeklaration verzichtet auf die Argumente bei der Definition des Funktionsrumpfes, eine nichtpunktfreie nennt die Argumente ausdrücklich.

- Nichtpunktfreie (oder: argumentbehaftete) Deklaration
- Punktfreie (oder: argumentlose) Deklaration

Typisierung

Typsysteme

Das Typsystem ist der Teil der Programmiersprache welcher die Typisierung (die Überprüfung) durchführt.
Typsysteme sind logische Systeme, die uns erlauben, Aussagen der Form *'exp ist Ausdruck vom Typ t'* zu formalisieren und sie mithilfe von Axiomen und Regeln des Typsystems zu beweisen.

Typisierung

Ziel der Typisierung ist die Vermeidung von Typverletzungen / Erhaltung der Typkonsistenz in der Sprache.

Sprachen die ein Typsystem beinhalten nennt man typisiert.
Fast allen aktuellen Programmiersprachen sind typisiert um, Zuweisungsfehler zu vermeiden, Typkonsistenz zu sichern.

Typkonsistenz und Typverletzungen

Typen sind miteinander konsistent, wenn die Typen der Operanden mit der Operation zusammenpassen (Die Operation auf diesen Typen definiert ist), andernfalls tritt ein Typfehler auf.

Typisierung von Haskell

Starke, statische Typisierung mit Typinferenz (es lohnt sich aber trotzdem zu typisieren da dadurch die Qualität der Fehlermeldungen steigt).
Gültige Ausdrücke haben wohldefinierte Typen und heißen wohlgetypt:
Typen können explizit angegeben sein, müssen sie aber nicht da sie inferiert werden.

Einteiltung der Typisierungsarten

Strongly vs. Weakly / loosly	stark vs. schwach
Static vs. Dynamic	Kompilierzeit vs. Laufzeit
Manifest vs. Inferred	explizit vs. implizit mit Typinferenz
Nominal vs. Structural	nominal vs. strukturell

Starke / Schwache Typisierung

Abhängig von der Typsicherheit einer Sprache.
Wie streng unterscheidet die Sprache die Typen? Welche Datentypen können ineinander umgewandelt werden? Erlaubt sie implizite Typumwandlungen? Erlaubt sie unsichere Typumwandlungen, bei denen z.B. Werte verloren gehen können?

Typfehler werden in

- schwach getypten Sprachen erst zur Laufzeit
- stark getypten Sprachen bereits zur Übersetzungszeit erkannt.

Statische / Dynamische Typisierung

Typprüfungen können zur Übersetzungszeit oder zur Laufzeit vorgenommen werden. Durch Auswertung jeder Art von Kontextinformation in Ausdrücken, Funktionsdefinitionen und Typklassen

verwendete Operatoren ((+), (/), (&&), (++)), Konstanten (2, 3.57, True, (2,3), [], [2,3,4],...), Muster ((‘c‘:cs), (x,False),...), etc.

Beeinflusst Zeitpunkt an dem Fehler entdeckt werden.

Wenn Typ einer Variable bekannt: klar, welche Werte in ihr enthalten sein können - Wissen statt Spekulation; frühe Entscheidung, welcher Typ verwendet werden soll, erleichtert Planbarkeit und erhöht Verständlichkeit des Programms, schränkt aber gleichzeitig Möglichkeiten/Flexibilität ein.

<u>Statische Typisierung</u>
Vorteile:

- Verlässkichkeit Weniger Typfehler zur Laufzeit, verbesserte Zuverlässigkeit, Fehler zeigen sich früher
- Leichtere Lesbarkeit da Information von statischen Typen zuverlässig (wenn explizit deklariert)
- Typinferenz auch möglich
- weniger Fallunterscheidungen im Compiler da Typ früh bestimmt, verbessert Planbarkeit für Compiler und Verständlichkeit für Mensch
- Erhöhte Effizienz: Mehr Informationen für Programmoptimierung zur Übersetzungszeit

Nachteile:

- Geringere Flexibilität zur Laufzeit. Benötigt Typumwandlungen die unsicher sein können.
- Man kann nicht alles statisch herleiten zb Array-Grenzen (aber manche Sprachen kommen ausschließlich mit statischer Typprüfung aus, zb Haskell). Schränkt Sprache aber ein und kann effektiv zu mehr Aufwand führen.
- Dynamische Sprachen möglicherweise sogar sicherer, weil diese besser getestet werden (bei Suche nach Typfehlern werden nebenbei auch andere Fehler erkannt)

<u>Dynamische Typisierung</u>
Vorteile:

- optionale Typdeklarationen möglich oder Typ in den Variablennamen schreiben

Explizite / Implizite Typisierung
Datentyp kann explizit genannt werden oder per Typableitung (*type inference*) ermittelt werden -> wenn Typen im Quellcode nicht explizit hingeschrieben werden, aber der Compiler diese im Rahmen der statischen Typprüfung aus der Programmstruktur ableiten kann.

Implizite Typisierung / Typisierung
Vorteile:
- Typinferenz spart das Anschreiben von Typen.

Nachteile:
- Zur Verbesserung der Lesbarkeit kann und soll man Typen explizit anschreiben -> Explizite Typisierung verbessert Lesbarkeit.
- Typinferenz und Ersetzbarkeit durch Untertypen verträgt sich nicht (im selben Teil des Programms).

Typprüfung

Muster-Prüfung / Musterkonsistenz
- Eine Variable als Muster ist mit jedem Typ konsistent.
- Ein Literal oder Konstante als Muster ist mit ihrem Typ konsistent.

Beispiele:
- Das Muster (42:xs) ist konsistent mit dem Typ [Int].
- Das Muster (x:xs) ist konsistent mit jedem Listentyp**.**

Monomorphe Typprüfung
Typprüfung stellt fest: Ein Ausdruck ist entweder
- wohlgetypt u. hat einen eindeutig bestimmten konkreten Typ.
- nicht wohlgetypt und hat überhaupt keinen Typ.

Polymorphe Typprüfung (mit Typklassen)
Dreistufiger Prozess aus:
1. Unifikation
2. Analyse (einschl. Instanz- und Typklassendeklarationen)
3. Simplifikation

Typprüfung stellt durch das Lösen von Typkontextsystemen (engl. constraint satisfaction) unter Unifikation von Typausdrücken fest:

Ein Ausdruck ist
- wohlgetypt und hat einen, mehrere, möglicherweise unendlich viele konkrete Typen.
- nicht wohlgetypt und hat überhaupt keinen Typ.

Beispiel: Die polymorphe Funktionssignatur
```
length :: [a] -> Int
```
mit beliebigem monomorpher Typ
```
[Int] -> Int
[(Bool,Char)] -> Int
```
in Aufrufkontexten wie:
```
length [1,2,3], length [True,False,True], length [], length [(+),(*),(-)]
```
lässt sich ein monomorpher Typ eindeutig erschließen:
```
length :: [Int] -> Int
```
Beachte: Der Kontext length [] erlaubt nur auf [a] -> Int für den Typ zu schließen.

Beispiel:
```
g (m,zs) = m + length zs
```
g bezeichnet eine Funktion, die als Argument Paare erwartet, an deren Komponenten folgende Bedingungen gestellt sind:
- 1-te Komponente: m muss von einem numerischen Typ sein, da m als Operand von (+) verwendet wird.
- 2-te Komponente: zs muss vom Typ [b] sein, da zs als Argument der Funktion length verwendet wird, die den Typ (`[b] -> Int`) hat.

Beides zusammen erlaubt den allgemeinsten Typ von g zu erschließen: `g :: (Int, [b]) -> Int`

Beispiel: Funktions-Komposition
```
g :: (Int, [b]) -> Int
g (m,zs) = m + length zs

f :: (a,Char) -> (a,[Char])
f (x,y) = (x,['a' .. y])
```

Die Funktions-Komposition `(g . f)`

- In der Mathematik: `(g . f) = g(f(x))`
- Das Resultat von f ist das Argument von g.
  Das Resultat von f ist vom Typ `(a,[Char])`.
  Das Argument von g ist vom Typ `(Int,[b])`.

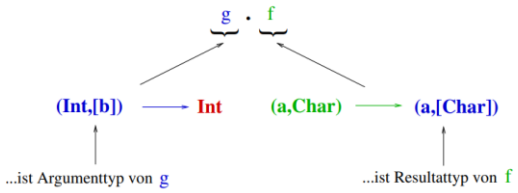
- Dadurch:
  `(g . f) :: (a,Char) -> (a,[Char]) wobei (Int, [b]) verlangt wird -> Int`

Damit sind noch zu bestimmen: Die allgemeinst möglichen Typen für die Typvariablen a und b die die obigen Bedingungen erfüllen. -> Der Schlüssel dafür: Unifikation.

Unifikation

Um den allgemeinsten, gemeinsamen Typen für 2 Variablen zu bestimmen.

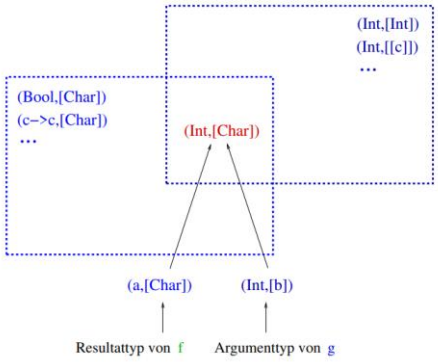
```
(g . f)

f :: (a,Char) -> (a,[Char])
g :: (Int, [b]) -> Int
```



...Unifikation löst die 3 Bedingungen in Kombination auf und liefert `Int` als allgemeinst möglichen Typ für `a`, `Char` für `b` und somit `((Int,Char) -> Int)` für `(g . f)`, d.h.:

```
(g . f) :: (Int,Char) -> Int
```

Suche: allgemeinste gemeinsame Instanz einer Menge



Unifikation, Unifikationsaufgabe

- ist die Bestimmung der allgemeinsten gemeinsamen (Typ-) Instanz (engl. most general common (type) instance) einer Menge von Typausdrücken und der zugehörigen Substitution.
- Konstanten und Variablen werden in Haskell bei Unifikation unterschiedlich behandelt.

- bestimmt allgemeinstmögliche mehrere Typbedingungen zugleich erfüllende Typausdrücke, die allgemeinste gemeinsame Instanz einer Menge von Typausdrücken sind.
- wertet dafür Kontextbedingungen in Kombination aus.
- führt i.a. zu polymorphen Typausdrücken.
- kann fehlschlagen.

Typen

In funktionalen Sprachen sind Variablen Namen für Ausdrücke. Ein Ausdruck kann ein elementarer Wert mit einem Datentyp sein oder eine Funktion.
Jede (Typ-) Variable hat einen Typ als Wert:

- Funktionale Typen deklarierbar mit syntaktischer Funktions-Signatur
- elementare Datentypen mit vordefinierten oder selbstdefinierten Deklarationen (wie `newtype`, `data`)

Ersetzbarkeitsprinzip
Ein Typausdruck b ist Instanz eines Typausdrucks a [a <- b], wenn a sich zu b spezialisieren lässt; wenn b eine Teilmenge von Typen von a beschreibt.

Datentyp-Deklarationen in Haskell

mittels drei Sprachkonstrukten: type, newtype und data

type: Typsynonyme

Typnamen, Typaliase, Synonyme für bereits existente Typen.
Erhöhen die Typsicherheit bzw. ungeeignete Verwendung nicht.

```
type Kurs = Float
type Pegelstand = Float
type Koordinate = Float
```

newtype: Neue Typen

Statt Typsynonyme, um Typsicherheit und Performance zu erhöhen. Die Nutz-Daten, liegen jetzt geschützt hinter Datenkonstruktoren.

```
newtype Kurs = K Float
newtype Pegelstand = Pgl Float
newtype Koordinate = Koordinate Float
```

Wichtig: *Datenwert-Konstruktoren* können als Funktionsdefinitionen gelesen werden.
`K, Pgl, Koordinate` sind Datenkonstruktor-Namen und der Wert danach sind Nutzdatentypen.
Beschränkt auf 1 Konstruktor mit 1 Datenfeld.

data: Algebraische Datentypdeklaration

Algebraische Typen mit `data`-Deklaration erlauben neue Datentypen mit beliebig strukturierten Werten einzuführen.
Mehrere Konstruktoren und mehrere Datenfelder erlaubt.

Anders als type-Deklarationen gewähren newtype- und data-Deklarationen Typsicherheit. In

Es kann jede `newtype`-Deklaration durch eine `data`-Deklaration ersetzt werden, aber nicht umgekehrt (siehe Summentypen).
Allerdings ist damit ein Performanzverlust verbunden, da (anders als bei `newtype`) bei `data`-Deklarationen die Datenwertkonstruktoren nicht nur Übersetzungszeit, sondern auch zur Laufzeit einen gewissen Berechnungsaufwand verursachen.
(Übersicht siehe Folie 523)

- **Aufzählungstypen** / Enumerations
  Mehrere 0-Stellige Daten-Konstruktoren
  Eigentlich ein Spezialfall von Summentypen

  ```
  data Jahreszeiten = Fruehling | Sommer | Herbst | Winter
  data Geschlecht = Maennlich | Weiblich
  ```

- **Produkttypen** / Verbundtypen, Record-Typen
  Ein mehrstelliger Daten-Konstruktor

  ```
  Produkttyp              data Person = P Vorname Nachname Geschlecht
  Unechter Produkttyp     data Person = P (Vorname,Nachname,Geschlecht)

  Tupeltyp        newtype Person = P (Vorname,Nachname,Geschlecht)
  Tupeltyp        type Person = (Vorname, Nachname, Geschlecht)
  ```

  Vergleich mit `newtype`: Produkttyp vs. Tupeltyp
  `newtype` erlaubt Tupeltypen (entsprechend Produkttypen mit einem Datenfeld – unechte Tupeltypen mit nur einem Datenfeld) eine neue Identität zu verleihen.

  Typsicherheit: Beides gewährleistet Typsicherheit.

  Performance: Vorteil von `newtype` Tupeltyp ist aber, dass der Daten-Konstruktor des Produkttyps nur zur Schreibzeit und zur statischen Typprüfung verwendet wird. Für data-Typen ist dies nicht möglich, weil es mehr als einen (Daten-) Konstruktor gibt. Produkttypen beanspruchen also zur Laufzeit zusätzliche Kapazitäten.

Fehlermeldungen-Qualität: bei Produkttypen besser

- **Summentypen** / Variantentypen, Vereinigungstypen
  ein oder mehrere null-, ein- oder mehrstellige (Daten-) Konstruktoren.
  Typen mit Werten, die sich aus der Vereinigung der Werte verschiedener (auch algebraischen Datentypen) zusammensetzen.

Unterschied zwischen Summentypen und Produkttypen

Summentypen **mögliche Werte**

```
                1   + 1   + 1
data Foo  = Foo | Bar | Baz                          -- 3 Werte
                1    + 1    + 2
data Foo1 = Foo1 | Bar1 | Baz1 Bool                  -- 4 Werte
                2         + 2         + 2
data Foo2 = Foo2 Bool | Bar2 Bool | Baz2 Bool        -- 6 Werte
```

Produkttypen

```
                 1
data Foo3 = Foo3                                      -- 1 Wert
                2**1 = 2
data Foo4 = Foo4 Bool                                 -- 2 Werte
                2**2 = 2  * 2
data Foo5 = Foo5 Bool Bool                            -- 4 Werte
                2**3 = 2  * 2  * 2
data Foo6 = Foo6 Bool Bool Bool                       -- 8 Werte
```

gemischt

```
                     2  * 2  * 2    +   2       +  1
data Foo7 = Foo7 Bool Bool Bool | Bar7 Bool | Baz7    -- 11 Werte
```

Rekursive Summentypen

Binärbäume:

```
data Baum = Leer | Wurzel Baum Int Baum deriving (Eq,Ord,Show)
```

Trinärbäume:

```
data TBaum = Nichts | Gabel Person TBaum TBaum TBaum deriving (Eq,Ord,Show)
```

N-stellige Bäume:

```
data NBaum = NB Int [NBaum] deriving (Eq,Ord,Show)
data NBaum0 = NB0 (Person,[Anschrift]) [NBaum0] deriving (Eq,Ord,Show)
data Nadelbaum = Nb String Int Char Baum TBaum [Nadelbaum] deriving...
```

Suchbäume:

```
type Schluessel = Int type Information = String
data Suchbaum = Sb Schluessel Information | Sk Schluessel Information Suchbaum Suchbaum
        deriving (Eq,Ord,Show)
```

Vordefinierte algebraische Datentypen

Aufzählungstypen

Typ der Ordnungswerte, 3 Werte:

```
data Ordering = LT | EQ | GT deriving (Eq,Ord, Bounded, Enum, Read, Show)
```

Typ der Wahrheitswerte, 2 Werte:

```
data Bool = False | True deriving (Eq,Ord,Bounded,Enum,Read,Show)
```

Trivialer Typ (oder *Nulltupeltyp*), 1 Wert:

```
data () = () deriving (Eq,Ord,Bounded,Enum,Read,Show)
```

Summentypen

Der Möglicherweise-Typ (polymorph)

```
data Maybe a = Nothing | Just a deriving (Eq,Ord,Read,Show)
```

Der Entweder/Oder-Typ (polymorph)

```
data Either a b = Left a | Right b deriving (Eq,Ord,Read, Show)
```

Feldsyntax

Ziel: Transparente, sprechende Typdeklarationen. In Haskell bieten sich dafür drei Möglichkeiten an:

1. Kommentierung
2. Typsynonyme
3. Feldsyntax (Verbundtypsyntax) mit dem Zusatzvorteil
   – ‘geschenkter’ Selektorfunktionen
   – wesentlich vereinfachte weitere Verarbeitungsfkt.

1) durch Kommentierung

```
newtype Gb = Gb (String,String,String) deriving (Eq,Ord,Show)
data G = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
data Meldedaten = Md String -- Vorname
                        String -- Nachname
                        Gb -- Geboren (tt,mm,jjjj)
                        G -- Geschlecht (m/w)
                        String -- Gemeinde
                        String -- Strasse
                        Int -- Hausnummer
                        Int -- PLZ
                        String -- Land
                deriving (Eq,Ord,Show)
```

2) durch Typsynonyme

```
type Vorname = String
type Nachname = String
type Ziffernfolge = String
type Zf = Ziffernfolge
newtype Gb = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)

type Geboren = Gb
data G = M | W deriving (Eq,Ord,Show)

type Geschlecht = G
type Gemeinde = String
type Strasse = String
type Hausnummer = Int
type PLZ = Int
type Land = String

data Meldedaten = Md Vorname Nachname Geboren Geschlecht Gemeinde Strasse Hausnummer PLZ Land
        deriving (Eq,Ord,Show)
```

3) durch Feldsyntax (oder: Verbundtypsyntax)

```
type Ziffernfolge = String
type Zf = Ziffernfolge
data G = M | W deriving (Eq,Ord,Show)
newtype Gb = Gb (Zf,Zf,Zf) deriving (Eq,Ord,Show)

data Meldedaten = Md { vorname :: String,
        nachname :: String,
        geboren :: Gb
        geschlecht :: G,
        gemeinde :: String,
        strasse :: String,
        hausnummer :: Int,
        plz :: Int,
        land :: String
        } deriving (Eq,Ord,Show)
```

class: Typklassen (Haskell spezifisch)

Typklassen sind das Sprachmittel von Haskell, Funktionen (genauer: Operator- und Relatorsymbole) zu überladen und typspezifisch zu implementieren.

Typclasses (ähnlich wie interfaces in java) setzten Funktionen fest die ihre Instanzen implementieren sollten.

>> Typvariablen haben Typen als Wert. Typklassen haben Typen als Instanz.

Ist z.B. ein Typ A Element der Typklasse `Num`, so kann sich der Programmierer darauf verlassen, dass auf A-Werten alle in `Num` aufgeführten Funktionen definiert sind, aber auch alle Funktionen von denen die Typklasse `Num` erbt, nämlich `Eq` und `Show`.

Zusammengefasst:

- Beinhalten eine beliebige Anzahl an Funktionen die man mit Typen die Instanzen sind ausführen kann.
  Durch Instanzbildungen der Typklasse für verschiedene Typen wird die Bedeutung dieser Funktionen typspezifisch.
- Können Protoimplementierungen (engl. default implementations) bereitstellen die überschrieben werden dürfen.
- Typen werden durch Instanzbildung (Implementierung der notw. Signaturen) zu Instanzen einer Typklasse.

Es sind die typspezifischen Bedeutungen der überladenen Funktionen einander entsprechend, ihre Funktionalität miteinander vergleichbar, jeweils typspezifisch zugeschnitten.

- Können von anderen Typklassen **erben**.
- Können geerbte Implementierungen **überschreiben**.

Automatische und manuelle Instanzbildung

Automatische Typklasseninstanzbildung

Algebraische und neue Typen (keine Typsynonyme) können mit `deriving`-Klausel automatisch als Instanzen vordefinierter Typklassen angelegt werden.

Nur von `Eq, Ord, Enum, Bounded, Show, Read`. Für andere Typklassen, gleich ob vor- oder selbstdefiniert, sind zur Instanzbildung stets instance-Deklarationen erforderlich.

Automatische Instanzbildungen können ausschließlich für die vordefnierten Typklassen `Eq, Ord, Enum, Bound, Read` und `Show` vorgenommen werden. Die automatische Instanzbildung nimmt dabei die manuelle Instanzbildung in 'naheliegendster' Weise vor. Das erfordert ein Vorwissen der 'naheliegendsten' Bedeutung der in einer Klasse vorgesehenen Funktionen. Dieses Vorwissen ist nicht für alle Typklassen für den Compiler ersichtlich. Deshalb ist automatische Instanzbildung nicht für alle Typklassen möglich.

Beispiel: Gleichheit automatisch interpretiert als Gleichheit in Struktur und Benennung.

```
data (Eq a, Eq b, Eq c) => Baum a b c = Blatt a b | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c) deriving Eq
```

ist gleichbedeutend mit:

Manuelle Typklasseninstanzbildung

```
data (Eq a, Eq b, Eq c) => Baum a b c = Blatt a b | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)

instance (Eq a, Eq b, Eq c) => Eq (Baum a b c) where
        (Blatt u v) == (Blatt x y) = (u == x) && (v == y)
        (Wurzel ltb z rtb) == (Wurzel ltb0 z0 rtb0) = (ltb == ltb0) && (z == z0) && (rtb == rtb0)
        _ == _ = False
```

Manuelle Typklasseninstanzbildung erlaubt Gleichheit abweichend von 'offensichtlicher' Gleichheit, beliebig durch Verwendung der Nutzungsdaten zu implementieren. Es gibt eine Minimalvervollständigung bei Instanzbildungen.

Vordefinierte und Selbstdefinierte Typklassen

Vordefinierte Typklassen

Beispiel `Eq`: Für Typen, deren Werte absolut verglichen werden können auf Gleichheit und Ungleichheit

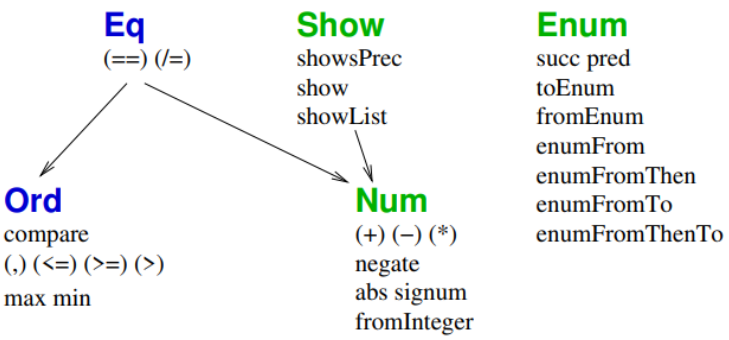
- verlangt von Instanzen die Implementierung von zwei Wahrheitswertfunktionen (oder Prädikaten): (==), (/=).
- stellt für beide Wahrheitswertfunktionen eine Protoimplementierung zur Verfügung:

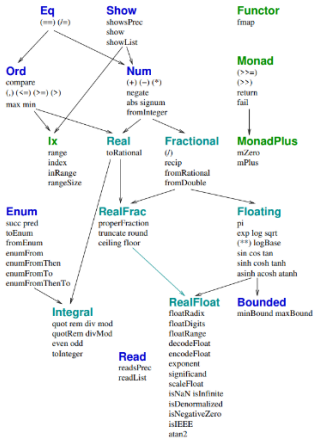
```
class Eq a where
        (==), (/=) :: a -> a -> Bool
        x /= y = not (x==y) -- Protoimplementierung f. (/=)
        x == y = not (x/=y) -- Protoimplementierung f. (==)

class Eq a => Ord a where
        (<), (<=), (>), (>=) :: a -> a -> Bool
        max, min :: a -> a -> a
        compare :: a -> a -> Ordering

        -- Protoimplementierungen ab hier
        compare x y
                | x == y = EQ
                | x <= y = LT
                | otherwise = GT
        (<=) x y = (x < y) || (x == y)
```

```
(<) x y = y < x
...
```

- Die Typklasse Ord erweitert die Klasse Eq. Jeder Typ, der zu einer Instanz der Typklasse Ord gemacht werden soll, muss bereits Instanz der Typklasse Eq sein.
- Für eine vollständige Instanzbildung reicht es, Implementierungen der Relatoren (==) und (<) anzugeben.

Typklassen in Haskell bilden eine Hierarchie:





Im Überblick:

- *Eq (Gleichheit):* Werte von Eq-Typen müssen auf Gleichheit und Ungleichheit vergleichbar sein.
- *Ord (Vergleichbarkeit):* Werte von Ord-Typen müssen über Gleichheit und Ungleichheit hinaus bezüglich ihrer relativen Größe vergleichbar sein.
- *Show (Ausgabe):* Werte von Show-Typen müssen eine Darstellung als Zeichenreihe besitzen.
- *Read (Eingabe):* Klasse der Typen, deren Werte aus Zeichenreihen herleitbar sind
- *Num (Numerisch):* Werte von Num-Typen müssen mit ausgewählten numerischen Operationen verknüpfbar sein, d.h. addiert, multipliziert, subtrahiert, etc. werden können.
- *Enum (Aufzählung):* Werte von Enum-Typen müssen aufzählbar sein, d.h. einen Vorgänger- und Nachfolgerwert innerhalb des Typs besitzen.

Mehrfachvererbung
auf Typklassenebene ist ebenfalls möglich: `class (Eq a, Show a) => Num a where`

Hierarchie zeigt sich auch in den Signaturen:
```
class (Num a, Ord a) => Real a where...
```

Selbstdefinierte Typklassen
Es bietet sich an Funktionen in einer selbstdefinierten neuen Typklasse zu bündeln, so Namen einzusparen und wiederzuverwenden.

Beispiel:
```
class (Ord a, Fractional a) => Analysierbar a where
        auswertung :: (a,a) -> (a,a,a)
        reihenausw :: [(a,a)] -> [(a,a,a)]
        geglaettet :: a -> a -> a

        reihenausw [] = []              -- Protoimplementierung für reihenausw (wird überschrieben)
        reihenausw ((x,y) : xys) = (auswertung (x,y)) : reihenausw xys
        geglaettet x y = (x+y)/2        -- Vollst. Implementierung für geglaettet
```

Instanzbildung: Minimalvervollst. bei Instanzbildungen für Analysierbar: Implementierung von `auswertung`

```
newtype Kurs = K Float deriving (Eq,Ord,Show)

instance Analysierbar Float where
        auswertung (f1,f2) = (f1,f2,geglaettet f1 f2)

instance Analysierbar Kurs where
        auswertung (K k1,K k2) = (K k1,K k2,K (geglaettet k1 k2))
        geglaettet k k0 = (4*k+6*k0)/10 -- überschrieben!
```

Erweiterung von `Analysierbar` mit einer neuen Typklasse `Warnung`:

```
class Analysierbar a => Warnung a where
        warnung :: (a,a) -> String
        warnreihe :: [(a,a)] -> String
        warnreihe xys = warnung (wr xys (0,0))
                where wr [] pq = pq wr ((x,y) : xys) (p,q) = wr xys (x+p,y+q)
```

Instanzbildung: Minimalvervollst. bei Instanzbildungen für Warnung: Implementierung von `warnung`

```
instance Warnung Kurs where
        warnung (K k1,K k2)
        | k2 > 9*k1 = "Verkaufen! Aktie zu spekulativ."
        | k2 > 6*k1 = "Halten! Aktie an Spekulationsschwelle."
        | k2 > 3*k1 = "Zukaufen! Aktie hat Phantasie."
        | otherwise = "Verkaufen! Aktie ohne Phantasie."
```

Typklassen in Haskell vs. Objektorienterte Klassen

Haskells Typklassenkonzept unterscheidet sich wesentlich vom Klassenkonzept objektorientierter Sprachen.

Objektorientiert: Klassen

- dienen der Strukturierung von Programmen.
- Dienen als Schablone für Objekterstellung

In Haskell: Typklassen

- dienen nicht der Strukturierung von Programmen

- sind Sammlungen von Typen, deren Werte typspezifisch, aber mit Funktionen / Relationen / Operatoren gleichen Namens (und ähnlicher Funktionalität) bearbeitet werden sollen (`(==),(>=),(+),(-),` etc.).

- dienen der Organisation und Verwaltung von Überladung (der Protoimplementierungen) und Erweiterungen der verlangten Funktionen für die Typen die Instanzen der Typklasse sind

- Erlauben einzelne (unecht) polymorphe Funktionen zu schreiben, die sich auf die TypKlassen-Funktionen abstützen, und die für alle Typen (die Instanzen der entsprechenden Typklasse sind) funktionieren.

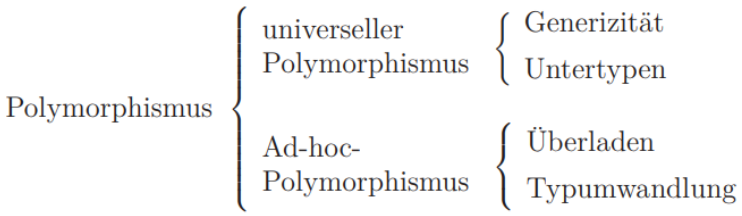
- erhalten Typen durch explizite Instanzbildung (*instance*) oder implizite automatische Instanzbildung (deriving) als Elemente zugewiesen.

Polymorphie

Polymorphie = Vieltypigkeit

In Haskell können sowohl Datentypen als auch Funktionen Polymorph deklariert werden, also mit einem Unbestimmten Typen arbeiten, wobei man hier statt dem Typ mit Typvariablen arbeitet.

- Verbesserte Transparenz und Lesbarkeit durch Betonung von Gemeinsamkeiten, nicht von Unterschieden.
- Verlässlichkeit und Wartbarkeit hinsichtlich Fehlersuche, Weiterentwicklung, etc.
- Programmiereffizienz



Nicht alle diese Arten des Polymorphismus gibt es in funktionalen Sprachen.

- Universell polymorph, echt polymorph, polymorph, Parametrische Polymorphie
- Ad hoc polymorph, unecht polymorph, Überladen

Überblick

Monomorph (Keine Typvariablen, nur konkrete Typen in der Signatur). Rechenvoschriften definiert für genau einen Typ.

```
fac :: Int -> Int
```

Parametrisch polymorph (uneingeschränkt polymorph wegen Typvariable, kein Typkontext)

```
length :: [a] -> Int
```

Ad hoc polymorph (eingeschränkt polymorph wegen Typvariable und Typkontext)

```
elem :: Eq a => a -> [a] -> Bool
```

Polymorphie auf Funktionen und Datentypen

Polymorphie auf Datentypen

Typvariable heißt polymorph, wenn der Wert mit mehreren Datentyp-Deklarationen angegeben werden kann.

Ermöglicht Wiederverwendung durch:

- Datentypkonstruktoren: Dieselbe Struktur für Werte aller Typen.
- Polymorphe Funktionen (Funktionsnamen und -implementierungen) auf diesen Datentypen.

So sind:

```
Baum Int Int Int,
Baum Int Char String
Baum (a->c) (b->c) (a->b)
```

Alle Instanzen desselben polymorphen Baum-Typs (a, b, c können beliebige Typen sein):

```
data Baum a b c = Blatt a b | Wurzel (Baum a b c) c (Baum a b c)
```

Sprachmittel: Typvariablen, Typklassen
Wiederverwendung: Wiederverwendung von Funktionsname und -implementierung.

Polymorphie auf Funktionen

a) **Parametrische Polymorphie**
Es gibt eine einzige Implementierung, die für alle konkreten Typen funktioniert, die für die Typvariablen in der Signatur eingesetzt werden.

Wie Polymorphie auf Datentypen nur mit Funktionen. Angewendet sowohl bei Funktionssignatur als auch bei Pattern-Matching.

Sprachmittel: Typvariablen

b) **Ad-hoc-Polymorphie (Überladen)**
Nur im Zusammenhang mit Typklassen-Funktionen.
Es gibt für jeden Typ, auf dessen Werten die Funktion arbeiten können soll, eine eigene typspezifische Implementierung. Diese typspezifische Implementierung erfolgt durch den Programmierer bei der Instanzbildung eines Typs fur die Typklasse, die diese unecht polymorphe Funktion enthält.

a. **Direkt überladene Funktionen**
Funktionen die Typklassenfunktionen erweitern oder überschreiben. Funktion ist Element (Bestandteil) einer Typklasse und wird abhängig vom Kontext / ausführenden Typen ausgewertet.

b. **Indirekt überladene Funktionen**
Funktion ist kein Element (Bestandteil) einer Typklasse, stützt sich aber auf eine ab, ohne selbst in einer Typklasse eingeführt zu sein. Funktionen erstellen die nicht Typklassen erweitern oder überschreiben aber ihre Funktionalität nutzen.

```
sum :: Num a => [a] -> a
```

Sprachmittel: Typklassen (Haskell spezifisch)
Wiederverwendung: Ad hoc Polymorphie unterstützt Wiederverwendung des Funktionsnamens, nicht jedoch der Funktionsimplementierung (diese wird typspezifisch bei der Typklasseninstanzbildung ausprogrammiert. Man kann nicht eine Funktion für alle Typen die existieren implementieren -> siehe „Grenzen des Überladens“)

Allgemeinster Typ

Den allgemeinsten Typ jedes Haskell-Ausdrucks kann man auch mit „`:t`“ bestimmen in der Konsole

```
length :: [a] -> Int
```

Ist allgemeinster Typ, der konkreten Typen:

```
[Int] -> Int
[String] -> Int
[(Float,Float)] -> Int
[(Integer -> Integer)] -> Int
...
```

Diese Typen sind dadurch Instanzen des Typs `([a] -> Int)`.

Grenzen des Überladens

Ist es zum Beispiel möglich jeden Typ zu einer Instanz der Typklasse Eq zu machen?
Dafür müsste man folgende Relation verallgemeinern:

```
(==) :: Eq a => a -> a -> Bool
```

In Haskell sind die Typen, auf deren Werten der Gleichheitsrelator (==) definiert ist genau die Elemente (oder Instanzen) der Typklasse Eq. Bei der Eq-Instanzbildung für einen Typ T (gleich ob manuell oder automatisch) wird die typspezifische Bedeutung des Gleichheitsrelators für T-Werte durch explizite Ausprogrammierung von Gleichheits- und Ungleichheitsrelator (==) und (/=) definiert und exakt festgelegt.

z.B.

(==) fac fib ->> False
(==) (\x -> x+x) (\x -> 2*x) ->> True
(==) (+2) (2+) ->> True

Antwort - Theorem aus der theoretischen Informatik:
Gleichheit von Funktionen ist nicht entscheidbar. Es gibt keinen Algorithmus, der für zwei beliebig vorgelegte Funktionen stets nach endlich vielen Schritten entscheidet, ob diese Funktionen gleich sind oder nicht.

(schließt nicht aus, dass für konkret vorgelegte Funktionen oder bestimmte Klassen von Funktionen deren Gleichheit (algorithmisch) entschieden werden kann. -> Nur dass es nicht verallgemeinert werden kann)

> Funktionen lassen sich nicht für jeden Typ angeben, sondern nur für eine Teilmenge aller Typen die Instanzen einer Typklasse sind.

Rekursions-Arten

In funktionalen Sprachen gibt es keine Anweisungen und deshalb auch keine Schleifen.
Eine Rechenvorschrift heißt rekursiv, wenn sie in ihrem Rumpf (direkt oder indirekt) aufgerufen wird.

Wir unterscheiden zwischen Rekursion auf:

- mikroskopischer Ebene (direkte / unmittelbare Rekursion)
  betrachtet einzelne Rechenvorschriften und die syntaktische Gestalt der rekursiven Aufrufe.
  1. Repetitive (oder schlichte oder endständige) Rekursion
  2. Lineare Rekursion
  3. Baumartige (oder kaskadenartige) Rekursion
  4. Geschachtelte Rekursion

- makroskopischer Ebene
  betrachtet Systeme von Rechenvorschriften und ihre wechselseitigen Aufrufe.
  5. Indirekte (verschränkte, wechselweise) Rekursion

1. Repetitive (schlichte, endständige) Rekursion
pro Zweig höchstens ein rekursiver Aufruf und diesen stets als äußerste Operation.

Beispiel:
```
ggt :: Integer -> Integer -> Integer
ggt m n
        | n == 0 = m
        | m >= n = ggt (m-n) n
        | m < n = ggt (n-m) m
```

2. Lineare Rekursion
pro Zweig höchstens ein rekursiver Aufruf, davon mindestens einer nicht als äußerste Operation.

Beispiel:
```
powerThree :: Integer -> Integer
powerThree n
        | n == 0 = 1
        | n > 0 = 3 * powerThree (n-1)
```

Beachte: In Zweig 2, n > 0, ist "∗" die äußerste Operation, nicht powerThree! -> Weil sie erst danach ausgeführt wird.

3. Baumartige (kaskadenartige, verzweigte) Rekursion
pro Zweig können mehrere rekursive Aufrufe nebeneinander vorkommen.

Beispiel:
```
binom :: Integer -> Integer -> Integer
binom n k
        | k == 0 || n == k = 1
        | otherwise = binom (n-1) (k-1) + binom (n-1) k
```

4. Geschachtelte Rekursion
rekursive Aufrufe enthalten rekursive Aufrufe als Argumente.

Beispiel:
```
fun91 :: Integer -> Integer
fun91 n
        | n > 100 = n - 10
        | n <= 100 = fun91 (fun91 (n+11))
```

5. Indirekte (verschränkte, wechselweise) Rekursion
zwei oder mehr Funktionen rufen sich wechselweise auf.

Beispiel:
```
isOdd :: Integer -> Bool
isOdd n
        | n == 0 = False
        | n > 0 = isEven (n-1)

isEven :: Integer -> Bool
isEven n
        | n == 0 = True
        | n > 0 = isOdd (n-1)
```

Effizienz bei Rekursion
Rekursive Lösungen sind elegant aber nicht immer effizient -> Laufzeit kann schlecht sein.

- Gefahr: (Unnötige) Mehrfachberechnungen

- Besonders anfällig: Baum-/kaskadenartige Rekursion.

Aus Implementierungssicht ist repetitive Rekursion am günstigsten, geschachtelte Rekursion am ungünstigsten.
Deshalb versucht man baumartige und lineare Rekursion auf die repetitive zurückzuführen.

Techniken:
- Akkumulationsparameter – Rechnen auf Parameterposition, ermöglicht die baumartige Rekursion in die günstige repetitive Rekursion überzuführen.
- Dynamische Programmierung
- Memoisation, mit einer Memo-Liste.

Nicht bestimmte Rekursionsmuster an sich sind problematisch, sondern ihr unzweckmäßiger Einsatz, wenn etwa baumartige Rekursion zu (unnötigen) Vielfachberechnungen von Werten führt! Zweckmäßig eingesetzt bietet z.B. baumartige Rekursion viele Vorteile, darunter zur Parallelisierung. Stichwort: Teile und herrsche (oder divide et impera oder divide and conquer)!

Aufrufgraph
Knoten sind Funktionen.
Eine einzige Kante falls es einen Aufruf gibt von einer Funktion zur anderen oder die Funktion sich selbst aufruft.
Daraus lässt sich die Art der Rekursivität ablesen.

- [A <-> A] bedeutet direkte Rekursivität
- [A <-> B] bedeutet wechselweise Rekursivität
- [A -> B] bedeutet eine direkte hierarchische Abstützung

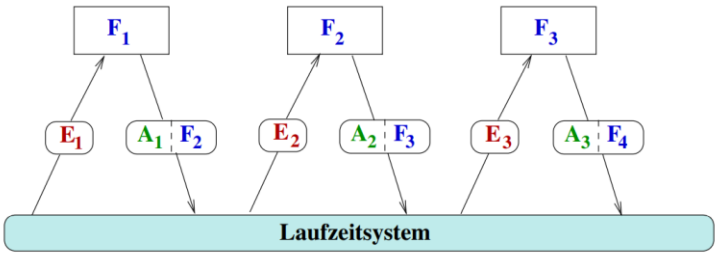
I/O

Wir können von der Arbeitweise des Rechners aber nicht des Benutzers abstrahieren. Interaktion ist notwendig.

Durch die Zustandslosigkeit und Seiteneffektfreiheit der funktionalen Programmierung waren unsere Programme sind bislang stapelverarbeitungsorientiert:

- Interaktion zwischen Benutzer und Programm findet nicht statt -> kein I/O
- Eingabedaten müssen zu Programmbeginn vollständig zur Verfügung gestellt werden.
- Einmal gestartet, besteht keine Möglichkeit mehr, mit weiteren Eingaben auf das Verhalten oder Ergebnisse des Programms zu reagieren und es zu beeinflussen.

Wir wollen und interaktionsorientierte Haskell-Programme:



Probleme in funktionalen Sprachen

1. Zustandslosigkeit und referentielle Transparenz

Rein funktionaler Programmierung: Vollkommene Abwesenheit von Seiteneffekten aber Ein-/Ausgabe verlangt Anwesenheit von Seiteneffekten. Ein- und Ausgabe, lesen und schreiben verändern den Zustand der äußeren Welt notwendig und irreversibel.

2. Eingabe und Ausgabe einer ideellen Schreib- und Lese-Operation

In funktionaler Programmierung müssen (wie alle Operationen und Funktionen) von funktionalem Typ sein, ein Resultat liefern.
Leseoperationen liefern einen Wert. Den Wert der gelesenen Eingabe.
Schreiboperationen liefern einen Wert.

a) Den geschriebenen Wert
b) einen Wahrheitswert in Abhängigkeit des Erfolgs der Operation
c) irgendeinen Wert (beliebig)
d) festen Wert

3. Komponierbarkeit

Ideelle Schreib- und Lese-Funktion lassen sich nicht komponieren.

3. Zeitliche Anordenbarkeit

Datenabhängigkeit allein reicht nicht länger aus zur Steuerung der Auswertungsreihenfolge von Ausdrücken!

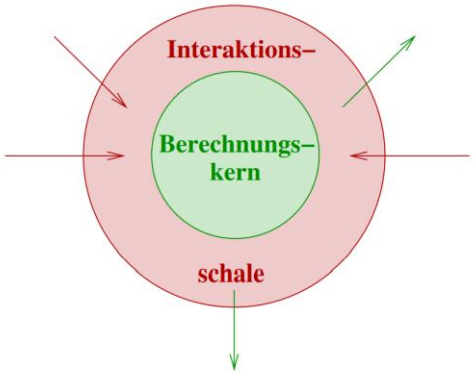
I/O Lösung in Haskell

Konzeptuell wird in Haskell ein Programm geteilt in

- einen rein funktionalen Berechnungskern
- eine imperativ ähnliche Dialog- und Interaktionsschale. zwischen denen mittels vordefinierter besonderer Ein-/Ausgabefunktionen Daten geschützt ausgetauscht werden können

Haskells Konzept zur Behandlung von Ein-/Ausgabe erlaubt Funktionen

- des Berechnungskerns (rein funktionales Verhalten, keine Seiteneffekte)
- der Dialog- und Interaktionsschale (nicht rein funktionales, sondern seiteneffektbehaftetes Verhalten)



`IO a` - Ein vordefinierter polymorpher Datentyp für Ein-/Ausgabe
In Haskell werden Werte von Ein-/Ausgabeoperationen durch unterschiedliche Typisierung strikt von Werten reiner funktionaler Typen getrennt.

`data IO a = ...` (Details implementierungsintern versteckt)

Der Datentyp (IO a) erlaubt die Unterscheidung von Typen
- des rein funktionalen Berechnungskerns `(Char, Int, Bool, etc.)`
- der imperativartigen Dialog- und Interaktionsschale `((IO Char)), (IO Int), (IO Bool), etc.)`

IO-Werte bleiben in der Schale u. können nicht den rein funktionalen Kern 'kontaminieren'.

`return und (<-)` - Vermittlungs-Operatoren zwischen Schale und Kern
Verbindung von funktionalem Kern und E/A-Schale

Von Schale zu Kern: `return :: a -> IO a`
- '*kontaminieren*' reiner Werte: return erlaubt rein funktionale Werte (engl. pure values) aus dem funktionalen Kern über die Schale als seiteneffektverursachende Werte (engl. impure values) in die äußere Welt zu transferieren.

Return in Haskell hat eine ganz andere Bedeutung als das aus OOP bekannte :
- kann Aktion in auftreten und ausgewertet werden, ohne dass die Auswertung der restlichen Aktionssequenz beendet wird
- kann deshalb auch mehrfach in einer Aktionssequenz auftreten

Von Kern zur Schale: `<- :: IO a -> a` (Informell)
- '*dekontaminieren*' E/A-verschmutzter Werte: I <- erlaubt den 'reinen' Anteil (a-Wert) seiteneffektverursachender Werte ((IO a)-Wert) aus der äußeren Welt in den funktionalen Kern zu transferieren.

Bemerkung: return und <- verhalten sich in diesem Sinne invers zueinander, wobei allerdings
- `return` eine (gewöhnliche) Funktion
- `<-` einen Wertvereinbarungsoperator (ähnlich ':=' oder '=') aus imperativen, objektorientierten Sprachen bezeichnet aber eigentlich ganz unterschiedlich ist:

'<-' bindet einen Wert an einen Namen, bleibt für den gesamten Programmlauf erhalten und ist nicht mehr veränderbar.

':=' leistet eine temporäre Wertzuweisung an eine durch einen Namen bezeichnete Speicherzelle. Die durch die Zuweisung geschaffene Verbindung zwischen Name (d.h. der mit ihm bezeichneten Speicherzelle) und Wert (d.h. dem Inhalt der Speicherzelle) bleibt so lange erhalten (temporär!), bis sie durch eine erneute Zuweisung an diese Zelle überschrieben und zerstört wird (destruktive Zuweisung!)

Vordefinierte primitive E/A-Operationen
als Bausteine, aus denen komplexe(re) Ein-/Ausgabeoperationen gebaut werden können

```
getChar :: IO Char
getInt :: IO Int
...
putChar :: Char -> IO ()
putInt :: Int -> IO ()
...
```

`(>>)` und `(>>=)` Kompositionsoperatoren für E/A-Operationen
Man benötigt eine Komposition von Operatoren damit man wie in einer imperativen Sprache eine Reihenfolge von Aktionen festlegen kann. Dafür eignet sich ein do-Block (als syntactic sugar für >>=) :

Beispiel:
```
main = do
```

```
foo <- putStrLn "Hello, what's your name?"
name <- getLine
putStrLn ("Hey " ++ name ++ ", you rock!")
```

(Sonderheit: Die letzte Funktion im do Block muss einen leeren () Wert zurückgeben
denn der Typ einer Aktionssequenz ist durch den Typ der letzten Aktion bestimmt.)

Der Kompositionsoperator (>>=) (bzw die do Notation) erlaubt die präzise Festlegung der zeitlichen Abfolge von E/A-Operationen:

binde-dann-Operator (engl. *bind oder then*)

```
(>>=) :: IO a -> (a -> IO b) -> IO b
```

Alternativerweise auch mit einer operationellen Bedeutung:

dann-Operator (engl. *sequence*)

```
(>>) :: IO a -> IO b -> IO b
```

Beispiel:

Die Kompositionsoperatoren (>>=) und (>>) erlauben die Bildung (assoziativer) Aktionssequenzen:

```
akt1 >>= f_akt2 >> akt3 >> akt4 >>= f_akt5 >>= return f
```

Aktionen

Aktionen sind Ausdrücke vom Typ (IO a).

- sind wertliefernde ('funktionaler' Anteil) E/A-Operationen ('prozeduraler' Anteil).
- bewirken einen Lese- oder Schreibseiteneffekt (prozedurales Verhalten) und liefern einen a-Wert als Ergebnis (funktionales Verhalten), der eingepackt als (IO a)-Wert zur Verfügung gestellt wird.
- heißen Aktionen (oder Kommandos) (engl. actions oder commands).

Wegen des kombinierten

1. prozeduralen (seiteneffekterzeugende Lese-/Schreiboperation)
2. funktionalen (Wert als Ergebnis liefernden)

Effekts der Auswertung von Aktionen (oder E/A-Ausdrücken), spricht man statt von Auswertung meist von Ausführung von Aktionen (oder E/A-Ausdrücken).

Informell:

Aktion = (1) E/A-Operation ('prozedural') + (2) Wertlieferung ('funktional') = wertliefernde E/A-Operation

Typ aller Leseaktionen

(IO a) (für 'lesegeeignete' Typinstanzen von a)
Der in einen a-Wert transformierte gelesene Wert wird als (formal erforderliches und inhaltlich gewolltes) Ergebnis von Leseoperationen verwendet.

Typ aller Schreibaktionen

(IO ()) mit () der einelementige Nulltupeltyp mit gleichbenanntem einzigen Datenwert ().
() als (einziger) Wert des Nulltupeltyps () wird als formal erforderliches Ergebnis von Schreiboperationen verwendet.

Auswertungsarten

A) rein funktionaler Ausdruck (engl. pure expression): Der Wert des Ausdrucks wird geliefert ('funktionaler' Effekt), sonst (passiert) nichts.
B) Aktion bzw E/A-Ausdruck (engl. impure expression):
   1. Eine E/A- Operation wird ausgeführt (Lese-/Schreibseiteneffekt wird generiert, 'prozeduraler' Effekt).
   2. ein a-Wert (eingepackt in den Datenwertkonstruktor IO) wird als Wert des E/A-Ausdrucks geliefert ('funktionaler' Effekt).

Kompositionsarten

A) Funktionskomposition (.)
   Schreiben mit Zeilenvorschub (vordefinierte Sequenz):

```
putStrLn :: String -> IO ()
putStrLn = putStr . (++ "\n")
```

B) IO-Komposition (>>=)
   Lesen einer Zeile und anschließendes Schreiben der gelesenen Zeile (selbstdefinierte Sequenz):

```
echo :: IO ()
echo = getLine >>= (\zeile -> putLine zeile)
```

Iterativ-artige E/A-Programme

do-Notation – vereinfachte Komposition

Die do-Notation als Ersatz für die IO-Kompositionsoperatoren (>>=) und (>>) zur imperativ ähnlicheren Bildung von Ein-/Ausgabesequenzen:

Zwei Beispiele:

```
do zeile <- getLine             statt          getLine >>= (\zeile -> putStrLn zeile)
   putStrLn zeile

do putStr "fun"         statt          putStr "fun" >> putStr "\n"
   putStr "\n"                                 putStr "fun" >>= (\_ -> putStr "\n")
```

Ein do-Ausdruck entspricht semantisch einer Sequenz von E/A-Operationen und kann (deshalb) auf eine beliebige Anzahl von Aktionen als Argumente angewendet werden.

Die Bedeutung des do-Ausdrucks:

```
do w1 <- akt1
        w2 <- akt2
        ...
        wn <- aktn
        return ( f w1 w2 ... wn )
```

ist definiert durch den (>>=)-Ausdruck:

```
akt1 >>= \p1 ->
akt2 >>= \p2 ->
        ...
aktn >>= \pn ->
return ( f p1 p2 ... pn )
```

Typ des do-Ausdrucks

Der Typ eines do-Ausdrucks ist durch den Typ seiner letzten Aktion bestimmt.
Aktionen liefern stets ein Ergebnis. Bleibt es unverwendet (entspricht Aktionskomposition mit (>>) statt mit (>>=)), kann die Nichtverwendung syntaktisch dadurch ausgedrückt werden, dass ein Aktionsergebnis nicht an einen Wertnamen wi, sondern an 'gebunden' wird, quasi 'unbenannt' gebunden wird:

```
do w1 <- akt1
        _ <- akt2
        _ <- akt3
        w4 <- akt4
        ...
        wn <- aktn
        return (f w1 w4 ... wn)
```

`while` Funktion

Ersetzt if else Verzweigung

```
while :: IO Bool -> IO () -> IO ()
while bedingung aktion
        = do b <- bedingung
        if b
                then
                do aktion
                while bedingung aktion  -- Rekursion!
        else
                return ()
```

Einstiegspunkt

Einstiegspunkt für die Auswertung (übersetzter) interaktiver Haskell-Programme ist (per Konvention) eine eindeutig bestimmte

- Definition mit Namen `main` vom Typ (IO a)
  Intuitiv: 'Haskell-Programm = E/A-Aktion'.

Fehlerbehandlung

Bisher bei Fehlern Berechnung mit dem Aufruf `error "Ungültige Eingabe"` unterbrochen.

Partialität von Funktionen

Natürliche Funktionen die auf natürlichen Zahlen totaldefiniert sind:

$$! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

$$fib : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ fib(n-2) + fib(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Ihre Implementierungen sind hingegen häufig nur **partiell definiert**.
So terminieren folgende Implementierungen nur für nichtnegative Argumente und sind für negative Argumente nicht definiert.

Explizite, transparente Sichtbarmachung der Partialität ist wichtig.

```
fac :: Int -> Int
fac n
        | n == 0 = 1
        | n >= 1 = n * fac (n - 1)
        | otherwise = error "undefiniert"

fib :: Int -> Int
fib n
        | n == 0 = 1
        | n == 1 = 1
        | n >= 2 = fib (n-2) + fib (n-1)
        | otherwise = error "undefiniert"
```

Wenn Funktionen die Partialität verstecken und undefinierte Eingaberäume nicht behandeln, dann sind sie „intransparent“ und „verschleiernd“.

Panikmodus (engl. panic mode)

polymorphe Funktion `error :: String -> a` meldet Fehler und stoppt Auswertung.

Beispiel:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
        | n == 0 = 1
        | n > 0 = n * fac (n-1)
        | otherwise = error "Ungültige Eingabe."
```

Positiv:

- Generell, einfach zu implementieren, schnell

Negativ: Radikalität

- Die Berechnung stoppt unwiderruflich.
- Jegliche Information über den Programmlauf ist verloren, auch sinnvolle.
- Für sicherheitskritische Systeme können die Folgen eines unbedingten Programmabbruchs fatal sein.

Auffangwerte (engl. default values)

Auffangwerte zur Weiterrechnung im Fehlerfall.

a) Funktionsspezifisch

im Fehlerfall wird ein funktionsspezifischer Wert als Resultat geliefert.

Beispiel:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
        | n == 0 = 1
        | n > 0 = n * fac (n-1)
        | otherwise = -1
```

Im Beispiel von `fac` gilt:

- Negative Werte treten nie als reguläres Resultat einer Berechnung auf.
- Der funktionsspezifische Auffangwert −1 erlaubt deshalb, negative Eingaben als fehlerhaft zu erkennen und zu melden, ohne den Programmlauf unwiderruflich abzubrechen.

Positiv

- Panikmodus vermieden, Programmlauf nicht abgebrochen.

Negativ

- Kann das Eintreten der Fehlersituation verschleiern und intransparent machen, wenn der Auffangwert auch als Resultat einer regulären Berechnung auftreten kann.
- unintuitiv
- Oft fehlt ein funktionsspezifischer Auffangwert gänzlich

b) Aufrufspezifisch

Im Fehlerfall wird ein aufrufspezifischer Auffangwert als Resultat geliefert.
Die Fehlersituation ist für den Programmierer transparent.
Allerdings: Nicht immer taugt das Argument selbst als Auffangwert. In solchen Fällen ist folgender allgemeinere Ansatz nötig.

Beispiel:

```
fac :: Integer -> Integer
fac n
        | n == 0 = 1
        | n > 0 = n * fac (n-1)
        | otherwise = n
```

Man kann auch Fehler an eine dritte Funktion delegieren.

Positiv:

- Panikmodus vermieden, Programmlauf nicht abgebrochen.
- Generalität, stets anwendbar.
- Flexibilität, aufrufspezifische Auffangwerte ermöglichen variierende Fehlerwerte und Fehlerbehandlung.

Negativ:

- Transparente Fehlerbehandlung ist nicht gewährleistet, wenn aufrufspezifische Auffangwerte auch reguläres Resultat einer Berechnung sein können – In diesen Fällen Gefahr ausbleibender Fehlerwahrnehmung Folgen durch Vortäuschen eines regulären und korrekten Berechnungsablaufs und eines regulären und korrekten Ergebnisses!

Zusammengefasst

```
-- 1) error -> exception/"panic mode"
        f 0 = 0
```

```
        f _ = error "wrong argument"

-- 2) special values
        f :: Int -> Int
        f 0 = 0
        f _ = -1 --or a value that tells more about cause of error like n

-- 3.1) special (wrapper) type that brings type safety and makes possibility of failure lear
        f :: Int -> Maybe Int
        f 0 = Just 0
        f _ = Nothing

-- 3.2) basically same as above, but allows(/requires) passing on an error message type ErrMsg = String
        f :: Int -> Either Int ErrMsg
        f 0 = Left 0
        f _ = Right "wrong argument"
```

Fehlertypen, Fehlerwerte, Fehlerfunktionen

(Fehler-) Datentyp Maybe a

Anzeigbarkeit von Fehlern wird erreicht durch Übergang von Typ a zum (Fehler-) Datentyp Maybe a:

```
data Maybe a = Just a | Nothing deriving (Eq, Ord, Read, Show)
```

umfasst die Werte des Typs a in der Form Just a mit dem Zusatzwert Nothing als explizitem Fehlerwert.

Positiv:

- Fehler können erkannt, angezeigt, weitergereicht und schließlich gefangen und (im Sinn von Auffangwertvariante 2) behandelt werden.
- Systementwicklung ist ohne explizite Fehlerbehandlung möglich (z.B. mit nichtfehlerbehandelnden Funktionen wie div).
- Fehlerbehandlung kann nach Abschluss durch Ergänzung der fehlerbehandelnden Funktionsvarianten zusammen mit den Funktionen `map_Maybe` und `maybe` durchgereicht werden

Negativ:

- Geänderte Funktionalität: Maybe b statt b.

Pragmatische Zusatzvorteile:

Die Funktion map_Maybe

Beachte: map_Maybe ist verschieden von der im prelude definierten namensähnlichen Funktion mapMaybe mit Signatur:

```
mapMaybe :: (a -> Maybe b) -> [a] -> [b]
```

Die Signatur von map_Maybe:

```
map_Maybe :: (a -> b) -> Maybe a -> Maybe b
map_Maybe f Nothing = Nothing --Durchreichen von Fehlern
map_Maybe f (Just u) = Just (f u) --Rechnen mit f im Normalfall
```

Die Funktion maybe

```
maybe :: b -> (a -> b) -> Maybe a -> b
maybe x f Nothing = x -- (Aufrufspez. Fehlerwert)
maybe x f (Just u) = f u -- (Rechnen mit f im Normalfall)
```

Zusammenfassung von Fehlerfunktionen

Im Zusammenspiel erlauben map Maybe und maybe Fehlerwerte

- Weiterzureichen
  `Map_Maybe: map_Maybe f Nothing = Nothing`
  der Fehlerwert Nothing wird von map Maybe durchgereicht.
- zu fangen und (im Sinn von Auffangwertvariante 2) zu behandeln
  `maybe x f Nothing = x`
  der aufrufspezifische Auffangwert x wird als Resultat geliefert

Im Zusammenspiel erlauben map Maybe und maybe Fehlerwerte

Module

Zerlegung von Programmen in überschaubare, (oft) getrennt übersetzbare Programmeinheiten als wichtige programmiersprachliche Unterstützung der Programmierung im Großen.

Zwei wichtige Eigenschaften zur Charakterisierung guter Modularisierung:

- Kohäsion (modullokal, intramodular) beschäftigt sich mit dem inneren Zusammenhang von Modulen, mit Art und Typ der in einem Modul zusammengefassten Funktionen.

- Koppelung (modulübergreifend, intermodular) beschäftigt sich mit dem äußeren Zusammenhang von Modulen, dem Import-/Export- und Datenaustauschverhalten.

Kennzeichen gelungener Modularisierung
Starke funktionale und Datenkohäsion
enger inhaltlicher Zusammenhang der Definitionen eines Moduls.

Schwache funktionale und lose Datenkoppelung
wenige Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Modulen, insbesondere keine direkten oder indirekten zirkulären Abhängigkeiten.

Aufbau von Haskell Modulen
Moduldateien werden eingeleitet von der Zeile:

```
EXPORT:
        module M where -- ermöglicht Export von M

        module M1 (D_1 (..), D_2, T_1, f_2, f_5) where -- selektiver Export von M


IMPORT:
        module M where
                import M1 -- nicht selektiver Import

        module M where
                import M1 (D_1 (..), D_2, T_1, C_1 (..), C_2, f_5) -- selektiver Import

        module M where
                import M1 hiding (D_1, T_2, f_1) -- selektiver Import
```

gefolgt von Deklarationen/Definitionen von:
1. Typen (algebraische Typen, Neue Typen, Typsynonyme)
2. Typklassen
3. Funktionen

Selektiver Import und Export bedeutet, dass der Programmierer festlegen kann, welche Namen (Datentypen, Konstruktoren, Funktionsnamen, Wertenamen, etc.) von anderen Modulen importiert werden können.

Reexport
Der Verzicht auf automatischen Reexport von Namen bedeutet, dass Namen, die ein Modul aus anderen Modulen importiert hat, nicht automatisch für den Import durch ein anderes Modul zur Verfügung stehen. Sie müssen explizit zum Reexport zugelassen werden.

Namenskonflikte
Namenskonflikte können durch qualifizierten Import aufgelöst werden:

```
import qualified M1
```

Verwendung: M1.f zur Bezeichnung der aus M1 importierten Funktion f
f zur Bezeichnung der im importierenden Modul lokal definierten Funktion f

Umbenennen importierter Module und Bezeichner durch Einführen lokaler Namen im importierenden Modul – für Modulnamen:

```
import qualified M1 as MyLocalNameForM1
```

MyLocalNameForM1 wird im importierenden Modul anstelle von M1 verwendet.

Alternativerweise, wenn selektiv:

```
import M1 (f1,f2) renaming (f1 to fac, f2 to fib)
```

Abstrakte Datentypen mit Modulen

Konkrete Datentypen (KDT) (in Haskell: Algebr. Datentypen)
- werden durch die exakte Angabe und Darstellung ihrer Werte spezifiziert, aus denen sie bestehen.
- auf ihnen gegebene Funktionen/Operationen werden zum Definitionszeitpunkt nicht angegeben und bleiben offen.

Abstrakte Datentypen (ADT)
- werden durch ihr Verhalten spezifiziert, d.h. durch die auf ihren Werten definierten Funktionen/Operationen und deren Zusammenspiel.
- die tatsächliche Darstellung der Werte des Datentyps wird zum Definitionszeitpunkt nicht angegeben u. bleibt offen.

Implementierung des ADT in Haskell
Implementierungstechnischer Schlüssel: Haskells Modulkonzept, speziell der selektive Export, bei dem Konstruktoren algebraischer Datentypen verborgen bleiben wodurch das mit ADT-Definitionen verfolgte Ziel:
- Kapselung von Daten, Realisierung des Geheimnisprinzips auf Datenebene (engl. information hiding) erreicht werden kann.

Entwicklungs-Stil: Reflektive Programmierung

Einflechtung reflektiver Feedback Schleifen im Programmentwicklungsprozess:
Wasserfall-Entwicklungsmodell mit 4 Stufen wobei man ständig zurückhüpfen kann.

(a) Problem verstehen
(b) Problemlösung konzipieren
(c) Problemlösung implementieren
(d) Implementierte Problemlösung testen und evaluieren

Für jede dieser Phasen gibt es typische Fragen. Von ihrer Beantwortung hängt es ab, ob mit der nächsten Phase fortgefahren wird oder in die oder eine frühere Phase zurückgesprungen wird. Dieses kontinuierliche Nachdenken und Hinterfragen des aktuellen Ergebnisses des bisherigen Entwicklungsprozesses ist namensgebend für dieses Vorgehen: Reflektive Programmierung.